

PROYECTO INTEGRADOR DE LA  
CARRERA DE INGENIERÍA MECÁNICA

**DESARROLLO DE UNA HERRAMIENTA NUMÉRICA PARA  
EL CÁLCULO DE PARÁMETROS MACROSCÓPICOS EN  
MEDIOS POROSOS BIDIMENSIONALES**

**Leonardo Díaz**

**Dr. Federico E. Teruel**  
Director

**Dr. Enzo A. Dari**  
Co-Director

Miembros del Jurado:  
**Dr. Federico E. Teruel**  
**Dr. Enzo A. Dari**  
**Dr. Mario Scheble**  
**Dr. Pablo Zanoeco**

Junio 2012

**División Mecánica Computacional**  
Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro  
Universidad Nacional de Cuyo  
Comisión Nacional de Energía Atómica



*... por que somos lo que hacemos,  
no lo que pensamos.*





# Contenido

<b>Resumen</b> .....	7
<b>Abstract</b> .....	9
<b>1. Introducción</b> .....	11
1.1    Motivación .....	13
1.2    Ecuaciones gobernantes.....	13
1.2.1    Ecuaciones microscópicas y macroscópicas de transporte .....	13
1.3    Coeficiente interfacial de transferencia de calor por convección: $h_{sf}$ .....	17
1.4    Objetivo .....	18
1.5    Organización del trabajo .....	19
1.6    Bibliografía citada.....	20
<b>2. Desarrollo de la herramienta numérica</b> .....	21
2.1    Etapas preliminares en el desarrollo de la herramienta numérica.....	21
2.2    Breve descripción del método numérico.....	23
2.3    Aproximación del término convectivo .....	25
2.4    Condiciones iniciales y de contorno.....	27
2.5    Resolución del sistema lineal .....	30
2.6    Conclusiones respecto al desarrollo de la herramienta numérica.....	30
2.7    Bibliografía citada.....	32
<b>3. Validación de la herramienta numérica</b> .....	33
3.1    Simulaciones para un canal de placas paralelas con condiciones de flujo de calor uniforme. ....	35
3.2    Simulaciones para un canal de placas paralelas con condiciones de temperatura de pared constante. ....	39
3.3    Simulaciones para un flujo laminar en un canal con expansión brusca.....	44
3.4    Conclusiones con respecto a la validación de la herramienta numérica.....	53
3.5    Bibliografía citada.....	55
<b>4. Determinación numérica del <math>h_{sf}</math></b> .....	57
4.1    Modelo físico del medio poroso.....	58

4.2	Simulaciones numéricas.....	60
4.2.1	Parámetros y mallas.....	62
4.2.2	Resultados microscópicos .....	63
4.3	Resultados macroscópicos.....	67
4.3.1	Variación del $h_{sf}$ con la posición del REV .....	72
4.3.2	Método propuesto para el cálculo del $h_{sf}$ .....	74
4.3.3	Comparación de la señal macroscópica y modelo unidimensional .....	77
4.4	Conclusiones respecto a los resultados.....	80
4.5	Bibliografía citada.....	82
<b>5.</b>	<b>Conclusiones.....</b>	<b>83</b>

# Resumen

Parámetros macroscópicos tales como el coeficiente de transferencia de calor por convección ( $h_s$ ) para flujos a través de obstáculos, resultan de gran interés en la industria debido a que son necesarios para describir la transferencia de energía a una escala macroscópica del problema (considere por ejemplo núcleos de transformadores de potencia, intercambiadores de calor o núcleos de reactores nucleares). En este estudio se realizan simulaciones numéricas bidimensionales de flujos incompresibles con transporte de un escalar pasivo (temperatura) a través de obstáculos simples, con el fin de calcular dicho parámetro. Para ello se desarrolla una herramienta numérica que permite calcular el coeficiente mencionado a partir de los resultados que se obtienen de una simulación a nivel microscópico en celdas representativas (REV). La herramienta se implementó utilizando la técnica de volumen de control finito y, acoplada a un código que resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes, permitió resolver numéricamente la ecuación de transporte para la temperatura para diferentes geometrías y condiciones de contorno. El código fue extensivamente validado mediante la simulación de flujos que se encuentran documentados en la literatura. Se simularon diferentes números de Reynolds ( $0.01 < Re < 100$ ), Péclet ( $0.01 < Pe < 100$ ), y condiciones de contorno térmicas definidas por temperatura constante y flujo de calor uniforme en las paredes, para obtener la dependencia del parámetro macroscópico como función de los números adimensionales del problema. Los resultados mostraron una fuerte dependencia del coeficiente interfacial con la porosidad, siendo éste mayor a medida que la porosidad disminuye. El problema se resolvió en un dominio compuesto por varios REV's repetidos permitiendo el desarrollo espacial de las variables involucradas. Adicionalmente se estudió el efecto que tiene la elección del REV y se observó que la elección afecta significativamente el valor del  $h_{sf}$  a medida que el  $Pe$  disminuye. Debido a este efecto se propone entonces un método alternativo para el cálculo de dicho parámetro en el caso disponer resultados para más de un REV. Resulta satisfactoria la comparación entre el modelo unidimensional y el promedio de la temperatura microscópica lograda con el método propuesto.



# Abstract

Macroscopic parameters like the interfacial heat transfer coefficient have been of great interest for the industry as they are needed to describe the energy transfer in a macroscopic scale (consider for instance cases like heat exchangers, nuclear reactors or power transformers). In this study, numerical simulations of two dimensional flows with transport of a passive scalar are carried out to compute this parameter. Following this objective, a numerical tool is developed to compute the parameter from microscopic solution of the flow (i.e. real geometry solution). The tool is developed following the well-known technique of finite control volume. A solver for the temperature equation is developed and coupled to an existing Navier-Stokes equation solver, allowing simulating flows with scalar transport for different geometries and boundary conditions. The developed code was heavily tested simulating benchmarks found in the literature. Following the main objective of this study, several Reynolds numbers ( $0.01 < Re < 100$ ), Péclet number ( $0.01 < Pe < 100$ ) and two boundary conditions (constant temperature and uniform heat flux) were simulated to compute the interfacial heat transfer coefficient as a functions of non-dimensional numbers and parameters that characterize the problem. Results showed a strong dependency of the porosity, being greater the macroscopic parameter as porosity is increased. Additionally and as the problem was solving considering several REV's, the space develop of the macroscopic variables can be studied. Moreover, and considering the fully developed region of the flow, it was found a dependency of the macroscopic parameter with the REV selection. Due to this effect, an alternative model to compute  $h_{sf}$  was proposed. Satisfactory results were obtained when the macroscopic model was compared with macroscopic results computed from microscopic simulations.

Keywords: porous media, interfacial convective heat transfer coefficient, macroscopic model, laminar, heat transfer.



## Capítulo 1

# Introducción

---

El estudio de la transferencia de calor que tiene lugar dentro de un medio poroso atrajo la atención de científicos e ingenieros debido a su vasta aplicación en el campo de la ingeniería. Tales aplicaciones se pueden encontrar en la industria química, mecánica, nuclear, geológica, ambiental, petrolífera, etc. En muchas de estas aplicaciones ingenieriles, la utilización de espumas metálicas o celulares, por ejemplo, tienen la ventaja de poseer una mayor área interfacial específica para el intercambio de calor entre el sólido y el fluido que circula a través del medio poroso. Por lo tanto, es esencial la investigación y desarrollo de modelos realistas de los fenómenos de transporte que tienen lugar en dicho medio para llevar a cabo el diseño y el análisis de dispositivos de alta eficiencia.

Dado el amplio espectro de las aplicaciones ingenieriles, el modelado macroscópico del transporte en flujos incompresibles a través de medios porosos ha sido extensamente estudiado en las últimas décadas. En su gran mayoría, la metodología de estudio se basa en la técnica de promediado en el volumen de una unidad representativa del medio poroso (celda unitaria), tanto para la transferencia de calor [Hsu 1990] como para la transferencia de masa [Whitaker 1966]. Autores clásicos como Bear [1972], Nield [1992], Ingham [1998], por mencionar algunos, también estudiaron la convección forzada y los modelos relacionados al transporte de calor en un medio poroso.

Desde el punto de vista de la transferencia de energía entre las fases, es decir, entre la fase sólida del material poroso y la fase líquida correspondiente al fluido que fluye a través de ella, existen básicamente dos modelos diferentes que comúnmente se encuentran en la literatura: (a) un modelo de equilibrio térmico local entre ambas fases y (b) un modelo de no-equilibrio. El primero asume que la temperatura media de la fase sólida no difiere mucho de la temperatura media del fluido, lo que significa asumir un equilibrio térmico local entre ambas fases. Este modelo simplifica enormemente el estudio teórico y numérico, pero en muchos problemas de aplicación esta hipótesis es inadecuada, o no se adapta al problema real [Schumann 1929, Quintard 1998, y Kaviany 1995]. En consecuencia, los trabajos se han orientado al modelo de no-equilibrio, tanto teórica como numéricamente [Quintard 1997, Ochoa-Tapia 1997 y Whitaker 1967].

El modelo de no-equilibrio ha sido estudiado por un gran número de investigadores. Podemos citar por ejemplo a Kuwahara et al. [2001], que propuso un procedimiento numérico para determinar los coeficientes de transporte macroscópicos, y en particular el coeficiente interfacial de transferencia de calor por convección ( $h_{sf}$ ), mediante una base teórica y sin conocimientos empíricos. Para ello utilizó una celda unitaria y determinó el coeficiente interfacial para el caso asintótico del sólido con conductividad térmica infinita –o caso de temperatura de pared constante-. Otro estudio representativo es el de Saito y de Lemos [2005]. Estos autores estudiaron la distribución de los parámetros en la celda unitaria y mediante la técnica de promediado espacial en un volumen representativo, determinaron dicho coeficiente interfacial para un flujo laminar.



## 1.1 Motivación

Vimos que los modelos macroscópicos empleados para describir el movimiento de fluidos y la transferencia de energía en medios porosos son de interés en diversas aplicaciones de la ingeniería (por ej. núcleos de transformadores de potencia, intercambiadores de calor, núcleos de reactores nucleares refrigerados por gas, etc.). Dichos modelos simplifican en gran medida la descripción del problema a tratar, pero requieren, en contrapartida, de parámetros macroscópicos que permitan su utilización y que en general son desconocidos. La obtención de estos parámetros, como por ejemplo el coeficiente interfacial de transferencia de calor por convección y su dependencia en relación a la porosidad del medio, al régimen de flujo y a las características del fluido/sólido en cuestión, son entonces, de particular interés. Esto motiva el presente trabajo que propone el cálculo de dichos coeficientes a partir de experimentos numéricos en celdas periódicas representativas de un medio poroso bidimensional simple (cuadrados desplazados).

En la siguiente sección se presentan el modelo matemático básico, las definiciones y, además, los conceptos necesarios para el cálculo del coeficiente interfacial de transferencia de calor por convección para flujos macroscópicos.

## 1.2 Ecuaciones gobernantes

### 1.2.1 Ecuaciones microscópicas y macroscópicas de transporte

Las ecuaciones locales de transporte para un fluido incompresible que fluye en un medio poroso rígido y homogéneo, se encuentran ampliamente estudiadas en la literatura [Kaviany 1995]. Su derivación no será repetida en el presente trabajo, sólo mencionaremos las ecuaciones y las herramientas

utilizadas en su derivación. Las ecuaciones gobernantes para la conservación de la masa, momento y energía en un fluido incompresible están dadas por:

- Continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

- Conservación de momento:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.2)$$

- Conservación de la energía (fase fluido):

$$(\rho c_p) \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}T) \right\} = \nabla \cdot (k_f \nabla T) \quad (1.3)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el campo velocidad microscópico del fluido,  $\rho$  la densidad,  $p$  la presión,  $\mu$  la viscosidad dinámica,  $T$  es la temperatura del fluido,  $k_f$  es la conductividad térmica,  $c_p$  el calor específico, y donde se considera que no hay fuentes de calor en el fluido y se desprecia la disipación viscosa.

Las ecuaciones macroscópicas para un flujo laminar en un medio poroso se obtienen a través de la aplicación de un operador que realiza un promediado espacial volumétrico sobre cualquier variable ( $\varphi$ ) del fluido [Gray 1977]. Este concepto se define matemáticamente de la siguiente manera:

$$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V_f} \varphi \, dV \quad ; \quad \langle \varphi \rangle = \phi \langle \varphi \rangle^f \quad ; \quad \phi = \frac{\Delta V_f}{\Delta V} \quad (1.4)$$

donde  $\Delta V_f$  es el volumen de fluido contenido en la celda unitaria (Representative Elementary Volume, o REV) de volumen  $\Delta V$ . Además, se tiene que  $\phi$  es por definición la porosidad del medio poroso, y donde  $\langle \rangle^f$  y  $\langle \rangle$  son operadores que representan al promediado intrínseco y al promediado volumétrico, respectivamente.

Cuando se aplica el operador (1.4) sobre la ecuación (1.3), se obtiene la ecuación macroscópica de la energía para un flujo laminar. La integración volumétrica sobre un REV para un medio con porosidad constante resulta:

$$(\phi \rho c_P) \left\{ \frac{\partial \langle T \rangle^f}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle^f \cdot \nabla \langle T \rangle^f \right\} = \nabla \cdot \left[ \phi \mathbf{k}_f \nabla \langle T \rangle^f + \frac{1}{\Delta V} \int_{A_{sf}} \mathbf{k}_f T d\vec{A} - \rho c_P \langle T' \mathbf{u}' \rangle \right] + \frac{1}{\Delta V} \int_{A_{sf}} \mathbf{k}_f \nabla T d\vec{A} \quad (1.5)$$

donde  $A_{sf}$  es el área de contacto sólido-fluido dentro del REV y donde  $dA$  es su vector elemental que apunta desde fluido al sólido. El término  $\langle T' \mathbf{u}' \rangle$  surge del término convectivo y corresponde al promediado espacial de fluctuaciones espaciales de las variables en el REV.

Es de interés mencionar que la ecuación 1.5 difiere de su par microscópico en los últimos tres términos de su lado derecho. El primero de éstos es denominado en general tortuosidad [Kaviany 1995] y se modela como un término difusivo debido a la variación de la temperatura en la interfase. El segundo, que surge de la no linealidad del término convectivo, es la dispersión térmica o dispersión del campo de temperaturas debido a la variación en el REV del campo de velocidad. Este también se modela como una difusión adicional. Finalmente, el tercero corresponde a la energía que intercambian las dos fases en el REV y se modela, en general, utilizando un coeficiente de convección [Kaviany 1995].

El modelo de no-equilibrio ha sido introducido heurísticamente en la literatura [Schlunder 1975], el cual considera que la ecuación macroscópica de la energía se ajusta al siguiente modelo:

$$(\phi \rho c_P) \left\{ \frac{\partial \langle T \rangle^f}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle^f \cdot \nabla \langle T \rangle^f \right\} = \nabla \cdot \bar{\mathbf{k}}_{eff} \cdot \nabla \langle T \rangle^f + h_{sf} a_{sf} (\langle T \rangle^s - \langle T \rangle^f) \quad (1.6)$$

donde  $a_{sf}$  es el área específica de contacto entre el sólido y el fluido,  $k_{eff}$  es el tensor de conductividad térmica efectiva, y  $\langle \rangle^s$  es el promedio intrínseco de la fase sólida, y donde además reconocemos al coeficiente interfacial de transferencia de calor por convección ( $h_{sf}$ ). Comparando el modelo heurístico (ec. 1.6) con la ecuación macroscópica (ec. 1.5) aparecen las siguientes relaciones:

$$h_{sf}a_{sf}(\langle T \rangle^s - \langle T \rangle^f) = \frac{1}{\Delta V} \int_{A_{sf}} k_f \nabla T d\vec{A} \quad (1.7)$$

$$\bar{\bar{k}}_{eff} \cdot \nabla \langle T \rangle^f \equiv \phi k_f \nabla \langle T \rangle^f + \frac{1}{\Delta V} \int_{A_{sf}} k_f T d\vec{A} - \rho c_p \langle T' u' \rangle \quad (1.8)$$

por lo tanto el coeficiente interfacial de transferencia de calor resulta:

$$h_{sf} \equiv \frac{\frac{1}{\Delta V} \int_{A_{sf}} k_f \nabla T d\vec{A}}{a_{sf}(\langle T \rangle^s - \langle T \rangle^f)} \quad (1.9)$$

donde el coeficiente de difusión efectiva se puede calcular a partir de la ecuación (1.8).

La gran ventaja que presenta el modelo descrito en la ecuación 1.6 es que no requiere el modelado explícito de la geometría del medio poroso. Sin embargo, el modelo requiere de parámetros macroscópicos que tienen la información de la geometría y de los procesos que se llevan a cabo a nivel microscópico. Resulta de interés entonces el conocimiento del coeficiente interfacial de transferencia de calor ( $h_{sf}$ ) y el coeficiente de difusión efectiva ( $\bar{\bar{k}}_{eff}$ ) en la construcción de un modelo macroscópico para la transferencia de energía en un medio poroso.

En este trabajo nos focalizaremos en el cálculo del coeficiente  $h_{sf}$  utilizando herramientas numéricas. De la ecuación 1.9 vemos que con una

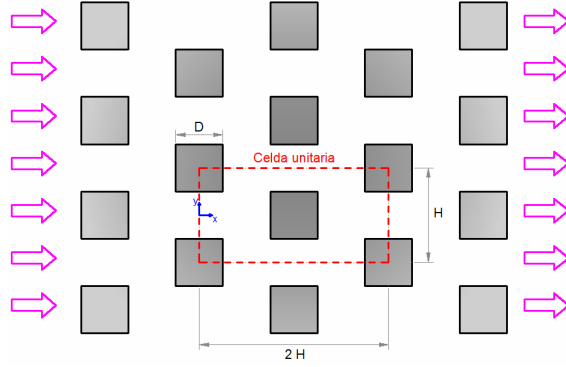
herramienta numérica que sea capaz de resolver y describir las variables microscópicas en el medio poroso (lado derecho de la ecuación 1.9), podemos calcular un parámetro macroscópico tal como el  $h_{sj}$ . Si bien con los datos obtenidos es posible realizar el cálculo del coeficiente de dispersión térmica (ecuación 1.10), estos resultados no son presentados en el trabajo y se deja su análisis para trabajos futuros.

A continuación se presenta la metodología numérica propuesta y seguida por Kuwahara et al. [2001] para calcular numéricamente el coeficiente interfacial de transferencia de calor por convección en un medio poroso.

### 1.3 Coeficiente interfacial de transferencia de calor por convección: $h_{sf}$

Para la determinación numérica de  $h_{sj}$ , Kuwahara et al. [2001], modelaron el medio poroso considerándolo a éste compuesto por un número infinito de barras de sección cuadrada de lado  $D$ , dispuestos regularmente en un patrón triangular, tal como se muestra en la figura 1.1. Luego resolvieron numéricamente las ecuaciones gobernantes (Navier-Stokes y ecuación de la energía) aprovechando la ventaja de que, dada la geometría infinita y ordenada del medio poroso propuesto, se puede identificar una celda repetitiva –o celda unitaria– que lo define.

Para obtener el campo de temperatura bajo la condición de flujo totalmente desarrollado, aplicaron condiciones de periodicidad sobre dicha celda.



**Figura 1.1.** Modelo físico del medio poroso formado por un arreglo de cuadrados desplazados.

Finalmente propusieron una correlación numérica para el  $h_{sf}$  en función de los parámetros adimensionales que caracterizan el problema: la porosidad ( $\phi$ ), el número de Reynolds ( $Re_D = \rho \langle \mathbf{u} \rangle D / \mu$ ) y el número de Prandtl ( $Pr = c_p \mu / k_f$ ). De los experimentos numéricos que realizaron obtuvieron una correlación de la forma:

$$\frac{h_{sf} D}{k_f} = \left( 1 + \frac{4(1-\phi)}{\phi} \right) + \frac{1}{2} (1 - \phi)^{1/2} Re_D^{0.6} Pr^{1/3} \quad (1.11)$$

válida para el rango de porosidades  $0.2 < \phi < 0.9$ .

## 1.4 Objetivo

El objetivo del presente trabajo es estudiar y desarrollar una herramienta numérica para resolver la ecuación de la energía en un flujo laminar bidimensional incompresible que fluye a través de un medio poroso con porosidad constante. Esto permitirá calcular parámetros macroscópicos que caracterizan la transferencia de calor en dicho medio poroso, tales como el coeficiente interfacial de transferencia de calor por convección. En general, como no se disponen de datos experimentales o son estos muy limitados, los parámetros de interés se calculan a partir de los resultados que se obtienen de una simulación a nivel *microscópico* en celdas periódicas que representen al

medio poroso infinito. Por lo tanto, un algoritmo que resuelva la ecuación de la energía es una herramienta útil para lograr dicho objetivo.

Para lograrlo se llevarán a cabo simulaciones microscópicas de un flujo a través de obstáculos simples que simulan el medio poroso. Se considerarán diferentes números de Reynolds ( $0.1 < Re < 100$ ), Prandtl ( $0.1 < Pr < 100$ ), y diferentes condiciones de contorno térmicas que permiten obtener la dependencia de estos parámetros como función de los números adimensionales del problema. Adicionalmente, se estudiará la dependencia espacial en el desarrollo hidrodinámico y térmico del flujo a través del medio.

## 1.5 Organización del trabajo

Este trabajo consta de 5 capítulos, siendo éste el capítulo introductorio donde se presenta el problema a estudiar. En el capítulo 2 se describe el desarrollo de la herramienta numérica y el algoritmo de solución que se utilizó para resolver el transporte de un escalar pasivo (la temperatura) en la geometría microscópica bidimensional del medio poroso. Luego se lleva a cabo un ejercicio de validación para poder validar la herramienta numérica implementada. Dichos resultados se muestran en el capítulo 3, los cuales, además, permiten justificar la elección del esquema numérico implementado en el medio poroso. En el capítulo 4 se muestran y discuten los resultados de las simulaciones microscópicas que se realizaron con el fin de calcular el coeficiente interfacial de transferencia de calor por convección. Se estudia también el comportamiento de dicho parámetro en función de los números adimensionales que caracterizan el problema. Por último, el capítulo 5 reúne las conclusiones más relevantes del presente trabajo.

## 1.6 Bibliografía citada

- [Bear 1972] J. Bear. (1972) *Dynamics of Fluids in Porous Media*. American Elsevier, New York.
- [Gray 1977] W. G. Gray and P. C. Y. Lee, (1977) On the theorems for local volume averaging of multiphase system. *Int. J. Multiphase Flow*, **3**, 333-340.
- [Ingham 1998] D. B. Ingham and I. Pop, (1998) *Transport Phenomena in Porous Media*, Elsevier, Amsterdam, pp. 103-129.
- [Hsu 1990] C. T. Hsu and P. Cheng. (1990) Thermal dispersion in a porous médium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **33**, 1587-1597.
- [Kaviany 1995] M. Kaviany, (1995). *Principles of Heat Transfer in Porous Media*, 2nd edn, Springer, New York.
- [Kuwahara 2001] F. Kuwahara, M. Shirota and A. Nakayama, (2001) *A numerical study of interfacial convective heat transfer coefficient in two-energy equation model for convection in porous media*. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **44**, 1153-1159.
- [Nield 1992] D. A. Nield and A. Bejan. (1992) *Convection in Porous Media*, Springer, New York.
- [Ochoa-Tapia 1997] J. A. Ochoa-Tapia and S. Whitaker, (1997) Heat transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid. *Int. Heat Mass Transfer*, **40**, 2691-2707.
- [Quintard 1997] M. Quintard, M. Kaviany and S. Whitaker, (1997) Two-medium treatment of heat transfer in porous media: numerical results for effective properties. *Adv. Water Resour.*, **20**, 77-94.
- [Quintard 1998] M. Quintard, (1998). Modeling local non-equilibrium heat transfer in porous media. in *Proc. 11th Int. Heat Transfer Conj.*, Kyongyu, Korea, vol. 1, 279-285.
- [Saito 2005] M. B. Saito and M. J. S. de Lemos (2005) Interfacial heat transfer coefficient for non-equilibrium convective transport in porous media. *Int. Comm. Heat and Mass Transfer*, **32**, 667-677.
- [Schlunder 1975] E. U. Schlunder, (1975). Equivalence of one- and two-phase models for heat transfer processes in packed beds: one-dimensional theory. *Chem. Eng. Sci*, **30**, 449-452.
- [Schumann 1929] T. E. W. Schumann, (1929) Heat Transfer: liquid flowing through a porous prism. *J. Franklin. Inst.*, **208**, 405-416.
- [Whitaker 1967] S. Whitaker. (1967) Diffusion and dispersion in porous media. *J. Am. Inst. Chem. Sci.*, **13**, 420-427.



## Capítulo 2

### Desarrollo de la herramienta numérica:

#### Algoritmo de solución para la ecuación de la energía para flujos incompresibles bidimensionales

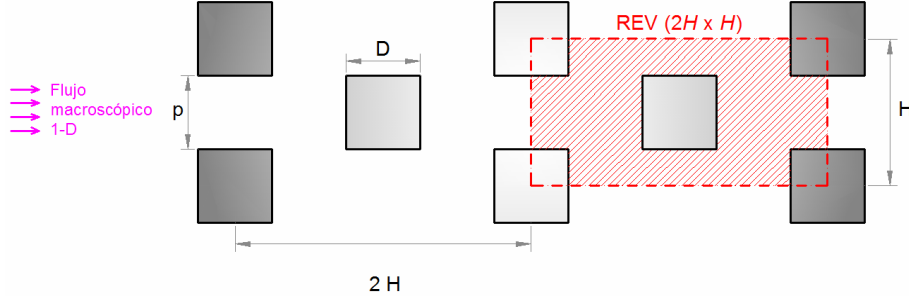
---

En este capítulo se describe el desarrollo de la herramienta numérica que se utilizó para resolver la ecuación de la energía para un flujo bidimensional incompresible. Esta etapa del trabajo tiene carácter formativo en el desarrollo e implementación de métodos numéricos para la resolución de ecuaciones del tipo convección-difusión. Adicionalmente, el desarrollo está motivado por la necesidad de calcular parámetros macroscópicos que caracterizan la transferencia de calor en el medio poroso, tales como el coeficiente interfacial de transferencia de calor. Estos parámetros se utilizarán para completar la ecuación de la energía macroscópica que se describe en el capítulo 1. El desarrollo de la herramienta numérica que se presenta en este capítulo está basado en la formulación estándar de la técnica de volumen de control finito desarrollada en las últimas cuatro décadas [Patankar 1980, Tannehill 1997].

#### 2.1 Etapa preliminar en el desarrollo de la herramienta numérica

El objetivo de la herramienta numérica es resolver el transporte de un escalar pasivo en la geometría microscópica bidimensional del medio poroso, la cual se describe en el capítulo 1 y se muestra en la figura 2.1. Para ello se desarrollará un código que resuelva la ecuación de transporte de la temperatura (es decir, la ecuación de la energía) como un escalar pasivo en la geometría

deseada. Este código se aneja a un código existente –escrito en lenguaje Fortran– que resuelve numéricamente las ecuaciones de N-S (Navier-Stokes) incompresible en 2 dimensiones utilizando el método de volúmenes finitos en mallas estructuradas definidas por rectángulos [Teruel 2007].



**Figura 2.1.** Volumen representativo elemental del medio poroso formado por cuadrados desplazados.

A continuación se presenta una breve descripción de las características que presenta el código 2D existente para N-S. El mismo utiliza el algoritmo SIMPLER desarrollado por Patankar [1981] para asegurar la incompresibilidad en cada paso de tiempo mediante un sistema de corrección de las velocidades a partir de las presiones calculadas. La ecuación de momento es integrada en cada volumen de control de una discretización del dominio y los términos resultantes son aproximados por diferencias de segundo orden en los términos difusivos, y de tercer orden (QUICK, por *Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics*) para los términos convectivos. La derivada temporal se aproxima por el método de Euler implícito o por Crank-Nicholson. Además, es destacable mencionar que el problema es resuelto en una grilla desplazada (o del inglés, *staggered*), es decir que los puntos nodales son diferentes para la presión y las velocidades, estando la presión centrada en el volumen mientras que las velocidades se encuentran en las caras de los mismos. Las condiciones de contorno en las paredes o las condiciones de entradas/salidas de flujo

pueden ser programadas de acuerdo al problema en cuestión. En general se utilizan condiciones de no deslizamiento en la paredes y condiciones de flujo totalmente desarrollado o de periodicidad a la salida de canales. El código posee además la implementación de un modelo  $k-\varepsilon$  para simular flujos turbulentos, los cuales no son estudiados en este trabajo. A continuación se explicará en forma breve los pasos realizados en la implementación de la ecuación de transporte de la temperatura como escalar pasivo.

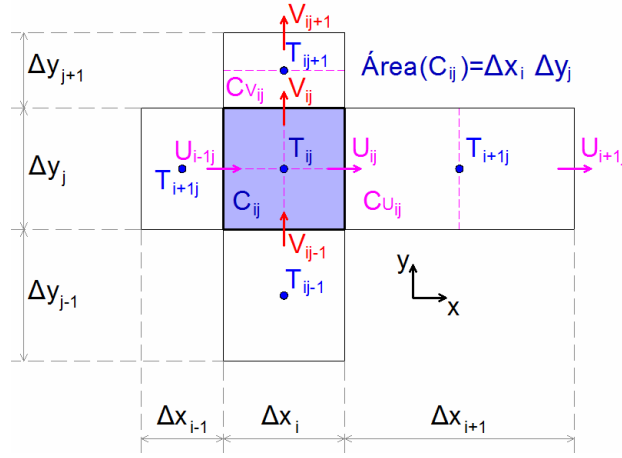
## 2.2 Breve descripción del método numérico

El primer objetivo del método de volúmenes de control finito, es el de particionar el dominio en cuestión e integrar, en este caso la ecuación de la energía, en cada volumen de control de dicho dominio. La ecuación adimensional de la energía para el caso bidimensional, no estacionario, fluido incompresible con propiedades constantes, sin disipación viscosa y sin término fuente, es:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} u_i T = \frac{1}{Pe} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (2.1)$$

donde  $i=1, 2$ , y donde las variables se adimensionalizaron con una velocidad característica  $U$  y una escala longitudinal  $H$ . Vemos que en la adimensionalización del problema aparece naturalmente el número de Péclet ( $Pe$ ). Para la resolución numérica del problema se debe contar con las condiciones iniciales y de borde apropiadas sobre todas las entradas/salidas de flujo en el dominio y sobre las paredes del mismo. Con el fin de evitar naturalmente el patrón de tablero de damas de las variables relevantes, el problema se describe, como se mencionó, sobre una grilla desplazada tal como fue introducida por Harlow y Welch [1965] y recomendada por Patankar [1981].

Para el elemento  $C_{ij}$  de la discretización del dominio, las variables son descritas de acuerdo a la figura 2.2, donde  $U$  y  $V$  son las velocidades horizontales y verticales respectivamente, y  $T$  la temperatura. Las caras de los volúmenes de control se eligen de tal forma que coincidan con los bordes del dominio. En este trabajo sólo se considera la utilización de mallas estructuradas y particiones Cartesianas del dominio.



**Figura 2.2.** Descripción de las variables en la grilla desplazada.

La integración espacial de la ecuación de la energía en el volumen de control  $C_{ij}$  resulta:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{C_{ij}} T}_{I} + \underbrace{\int_{C_{ij}} \frac{\partial}{\partial x} UT}_{II} + \underbrace{\int_{C_{ij}} \frac{\partial}{\partial y} VT}_{III} = \frac{1}{Pe} \cdot \underbrace{\int_{C_{ij}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right)}_{IV} \quad (2.2)$$

Donde la integración espacial de la derivada temporal (I), de los términos convectivos (II y III) y del término difusivo (IV) se pueden aproximar respectivamente como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{C_{ij}} T dx dy \approx \frac{\partial}{\partial t} [T_{ij} A_{ij}] \quad (2.3)$$

$$\int_{C_{ij}} \frac{\partial}{\partial x} UT dx dy \approx [U_{ij} T_{ij}|_e - U_{i-1j} T_{ij}|_w] \cdot \Delta y_j \quad (2.4)$$

$$\int_{C_{ij}} \frac{\partial}{\partial y} VT dx dy \approx [V_{ij} T_{ij}|_n - V_{ij-1} T_{ij}|_s] \cdot \Delta x_i \quad (2.5)$$

$$\int_{C_{ij}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy \approx \int_{C_{ij}} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_e - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w \right) dy + \int_{C_{ij}} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_n - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_s \right) dx =$$

$$\Delta y_j \left[ 2 \frac{T_{i+1j} - T_{ij}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} - 2 \frac{T_{ij} - T_{i-1j}}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \right] + \Delta x_i \left[ 2 \frac{T_{ij+1} - T_{ij}}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} - 2 \frac{T_{ij} - T_{ij-1}}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} \right] \quad (2.6)$$

y los subíndices  $e$ ,  $w$ ,  $n$  y  $s$  indican los valores correspondientes a las caras este, oeste, norte y sur del volumen finito respectivamente.

En la discretización de la derivada temporal de la ecuación de la energía, la integración temporal se lleva a cabo mediante el método de Euler implícito, la cual es una aproximación incondicionalmente estable. Por lo tanto, luego de la integración temporal sobre un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , la derivada temporal se puede aproximar como:

$$\int_{\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} T A_{ij} \approx (T_{ij}^k - T_{ij}^{k-1}) A_{ij} \quad (2.7)$$

donde  $k$  indica el paso temporal. La integración temporal de los términos restantes se aproximan como el producto del paso de tiempo y el valor del integrando al final del intervalo de tiempo, con lo que para el volumen  $C_{ij}$  la ecuación discretizada queda:

$$(T_{ij}^k - T_{ij}^{k-1}) A_{ij} + \Delta t \left[ U_{ij}^k T_{ij}^k \Big|_e - U_{i-1j}^k T_{ij}^k \Big|_w \right] \cdot \Delta y_j + \Delta t \left[ V_{ij}^k T_{ij}^k \Big|_n - V_{ij-1}^k T_{ij}^k \Big|_s \right] \cdot \Delta x_i = \frac{2\Delta t}{Pe} \left\{ \Delta y_j \left[ \frac{T_{i+1j}^k - T_{ij}^k}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} - \frac{T_{ij}^k - T_{i-1j}^k}{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}} \right] + \Delta x_i \left[ \frac{T_{ij+1}^k - T_{ij}^k}{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}} - \frac{T_{ij}^k - T_{ij-1}^k}{\Delta y_j + \Delta y_{j-1}} \right] \right\} \quad (2.8)$$

El término convectivo requiere un comentario especial que será descripto en la próxima sección.

### 2.3 Aproximación del término convectivo

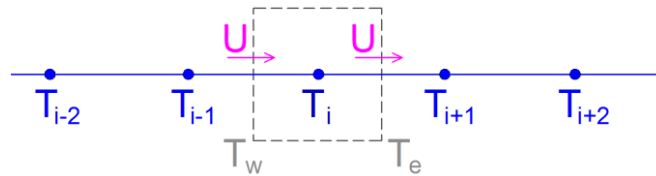
Es conocido que la utilización de esquemas centrados o promedios para el término convectivo, produce oscilaciones que pueden llevar a la no

convergencia de la solución si el numero de Péclet local es excesivamente grande. Por este motivo, en general se adoptan esquemas de tipo *upwind* en donde se tiende a otorgar mayor peso a la información proveniente aguas arriba en el flujo. Estos esquemas, en caso de ser de primer orden, conducen a lo que usualmente se conoce con el nombre de difusión numérica [Tannehill 1997 p. 217]. La difusión numérica estabiliza el esquema numérico pero deteriora la solución, inclusive algunas veces lleva a soluciones erróneas [Leonard 1979]. Este hecho motivó el desarrollo de esquemas de mayor orden, tales como el QUICK (*upwind* de tercer orden). En este caso se implementó *upwind* de primer orden y el método QUICK para el término convectivo. Si bien este último presenta también oscilaciones, éstas pueden ser mitigadas siendo mucho más preciso que el *upwind* de primer orden.

El esquema *upwind* de primer orden (ver figura 2.3) consiste en utilizar el valor aguas arriba para evaluar la temperatura en la cara de volumen de control según el siguiente esquema:

$$T|_e = \begin{cases} T_i & \text{si } U > 0 \\ T_{i+1} & \text{si } U < 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

$$T|_w = \begin{cases} T_{i-1} & \text{si } U > 0 \\ T_i & \text{si } U < 0 \end{cases} \quad (2.10)$$



**Figura 2.3.** Malla 1-D donde los valores en las caras de los volúmenes de control están dadas por  $T_w$  y  $T_e$ .

El esquema QUICK se implementa con la misma idea pero utilizando dos nodos aguas arriba y un nodo aguas abajo. Por un tema de estabilidad y

como es recomendado por Hayase et al. [1992], este esquema se implementa como un *upwind* de primer orden más un término fuente que consiste en los términos restantes. Los valores en las caras del volumen de control según el esquema QUICK se calculan como:

$$T|_e = \begin{cases} T_i + \frac{1}{8}(-T_{i-1} - 2T_i + 3T_{i+1}) & \text{si } U > 0 \\ T_{i+1} + \frac{1}{8}(3T_i - 2T_{i+1} - T_{i+2}) & \text{si } U < 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

$$T|_w = \begin{cases} T_{i-1} + \frac{1}{8}(-T_{i-2} - 2T_{i-1} + 3T_i) & \text{si } U > 0 \\ T_i + \frac{1}{8}(3T_{i-1} - 2T_i - T_{i+1}) & \text{si } U < 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

donde los términos entre paréntesis son los que se tratan como fuentes y a su vez son resueltos iterativamente.

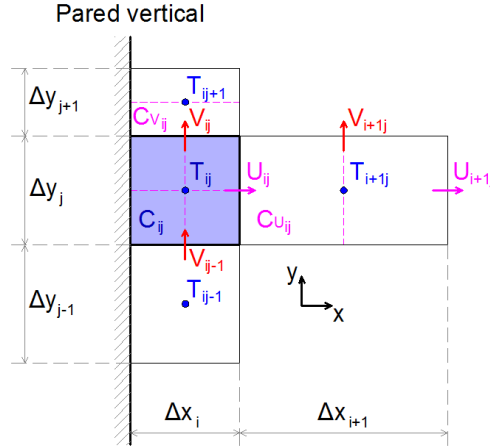
En el siguiente capítulo se evaluará la capacidad de ambos esquemas para aproximar el término convectivo, pero finalmente se utilizará QUICK dada su estabilidad y precisión en el momento de simular flujos con altos  $Pe$ .

## 2.4 Condiciones iniciales y de contorno

El motivo del desarrollo de la herramienta numérica es utilizarla para calcular los parámetros macroscópicos relacionados al REV que se muestra en la figura 2.1. Por lo tanto, es conveniente desarrollar e implementar las condiciones de borde que se utilizarán en la geometría final, o sea, condiciones de temperatura constante y de flujo de calor uniforme en las paredes, temperatura uniforme en las entradas del dominio, y también, condiciones de periodicidad o de Neumann para las salidas. Discutiremos primero la implementación de las condiciones de borde en las paredes. Considerando el volumen de control representado en la figura 2.4, el cual tiene la cara oeste coincidente con una pared, la condición de contorno aparece al evaluar el flujo de calor en esta cara, que se calcula como

$$q''_{pared} = k_f \left. \frac{dT}{dx} \right|_{pared} \quad (2.9)$$

que para el caso de flujo uniforme, es un dato y por lo tanto no debe utilizarse ningún esquema especial.



**Figura 2.4.** Descripción de las variables utilizadas en la implementación de las condiciones de borde para el caso de una pared vertical.

En el caso de temperatura de pared constante, se aproxima el flujo utilizando el dato en la pared ( $T_{wall}$ ) y los dos siguientes ( $T_{ij}$  y  $T_{i+1j}$ ) para obtener una aproximación de segundo orden según el siguiente esquema:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_w = a \cdot T_{wall} + b \cdot T_{ij} + c \cdot T_{i+1j} \quad (2.10)$$

donde

$$a = -\frac{(\Delta x_{i+1} + 3\Delta x_i)}{\Delta x_i(\Delta x_{i+1} + 2\Delta x_i)} ; \quad b = \frac{(\Delta x_{i+1} + 2\Delta x_i)}{\Delta x_i(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)} ; \quad c = -b - a \quad (2.11)$$

Cabe destacar que la condición de borde afecta al esquema QUICK ya que en caso de ser saliente de la pared la velocidad normal, el esquema convectivo debe ser modificado. En tal caso se utiliza la condición de borde para reemplazar el dato que no se tiene y conservar el orden (véase Hayase et al. [1992] para mayor detalle).



En cuanto a las condiciones de entrada, éstas no presentan mayor dificultad ya que se supone un perfil uniforme dato. Para la salida en cambio, en general trabajamos con condiciones de borde periódicas o que surgen de la conservación de la energía (en general no es adecuado imponer condiciones del tipo derivadas normales iguales a cero sobre las caras de salida para la temperatura). Para el caso periódico, los perfiles de temperatura a la entrada y a la salida deben ser similares. Esto significa que, para el caso de temperatura de pared constante, la condición de borde impuesta sobre el último volumen de control se expresa como:

$$(T - T_W)|_{x=i+1} = \tau(T - T_W)|_{x=i} \quad (2.12)$$

siendo

$$\tau = \frac{(T_B - T_W)|_{x=i+1}}{(T_B - T_W)|_{x=i}} \quad (2.13)$$

donde  $T_B$  es la temperatura media. Para el caso de flujo de calor uniforme, en cambio, la condición de borde surge del balance de energía, lo que significa que se debe cumplir:

$$T(x, y)|_{x=i+1} = T(x, y)|_{x=i} + \Delta T_i \quad (2.14)$$

donde

$$\Delta T_i = \frac{q''_{dato} \Delta x_i}{k_f} \quad (2.15)$$

Numéricamente estas condiciones se imponen como una condición de Dirichlet donde se presupone conocido el campo de temperaturas sobre toda la cara de salida de flujo del dominio.

Una consideración especial requiere el caso de las condiciones de borde periódicas para la temperatura en el caso del REV mostrado en la figura 2.1. Se aplican las mismas condiciones expresadas en las ecuaciones 2.14 – 2.15,

pero donde la salida se relaciona con la entrada al volumen de control. En otras palabras la periodicidad aparece cada  $2H$  (esto se discutirá con mayor detalle en el capítulo 4).

## 2.5 Resolución del sistema lineal

El sistema discreto expresado en la ecuación 2.8 se escribe para cada volumen finito de la malla, por lo tanto se construye un sistema lineal de un número de ecuaciones igual al número de volúmenes de control que resultan de la discretización del dominio. Este sistema es resuelto por el método SOR (del inglés, *Successive Over-Relaxation*) con sub-rutinas implementadas en el código para resolver N-S. Este esquema intenta incrementar la rapidez de la convergencia del método Gauss-Seidel mediante la introducción de un parámetro (el de relajación) en el esquema iterativo, que luego se optimiza para mejorar la velocidad de la convergencia. La tolerancia se ingresa como un parámetro de entrada en el código, el cual está relacionado con el residuo de la ecuación en el método iterativo. En el estudio previo de la herramienta numérica se observó que el tiempo computacional para resolver la ecuación de la energía era despreciable frente al tiempo necesario para resolver las ecuaciones de N-S. Por lo tanto, no se hizo necesaria la optimización del parámetro de relajación y se utilizó el mismo valor que en el cálculo de las velocidades en la ecuación de N-S.

## 2.6 Conclusiones respecto al desarrollo de la herramienta numérica

En este capítulo se presentó el desarrollo de la herramienta numérica que se utilizó para resolver el transporte de un escalar pasivo –la temperatura– en la geometría microscópica bidimensional del medio poroso. Dicha

herramienta permite calcular parámetros macroscópicos, tales como el coeficiente interfacial de transferencia de calor, a partir de los resultados que se obtienen de una simulación a nivel microscópico en celdas periódicas que representen al medio poroso infinito. El desarrollo de la herramienta numérica estuvo basado en la técnica de volumen de control en mallas estructuradas definidas por rectángulos. El algoritmo implementado se anexó a un código existente que resuelve numéricamente las ecuaciones 2-D de Navier-Stokes incompresible en dicha geometría, presentándose además las características esenciales del código existente.

Se mostró la integración espacial de la ecuación de la energía en cada volumen de control y se estudiaron dos esquemas para aproximar el término convectivo: *upwind* de primer orden y QUICK (*upwind* de tercer orden). También se describió la implementación de las condiciones iniciales y de borde necesarias para resolver el problema. Finalmente se mencionó brevemente el esquema SOR utilizado para resolver el sistema de ecuaciones lineales resultantes de la discretización de la ecuación de transporte.

## 2.7 Bibliografía citada

- [Harlow 1965] F. H. Harlow and J. E. Welch, (1965) Numerical Calculation of time-dependant viscous incompressible flows of fluid with free surface, *Physics of Fluids*, **8**, 2182-2189.
- [Hayase 1992] T. Hayase, J. A. C. Humphrey and R. Greif. A Consistently formulated QUICK scheme for fast and stable convergence using finite-volume iterative calculation procedures. *Journal of Computational Physics*. 1992, **98**, 108-118.
- [Leonard 1979] B. P. Leonard. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*. 1979, **19**, 59-98.
- [Patankar 1980] S. V. Patankar, *Laminar Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere, 1980.
- [Patankar 1981] S. V. Patankar, (1981) A calculation procedure for two-dimensional elliptic situations. *Numerical Heat Transfer*, **4**, 409-425.
- [Tannehill 1997] J. C. Tannehill, D. A. Anderson and R. H. Pletcher, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer* (2nd Ed), Taylor and Francis, 1997.
- [Teruel 2007] F. E. Teruel, *Macroscopic turbulence modeling and simulation for flow through porous media*. Tesis doctoral, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2007.

## Capítulo 3

### Validación de la herramienta numérica: Soluciones numéricas de la ecuación de la energía para flujos incompresibles bidimensionales.

---

Los esquemas numéricos para resolver la ecuación de la energía descritos en el capítulo 2 se implementan sobre un código Fortran existente, el cual resuelve numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo bidimensional incompresible. En este capítulo se presentan los resultados de la validación de la herramienta numérica implementada, lo cual permite confiar en el método numérico que se utiliza para las simulaciones en el medio poroso. El ejercicio de validación además permite justificar la elección del esquema numérico implementado en dicho medio poroso. Antes de continuar resulta conveniente mencionar la forma adimensional que tienen las ecuaciones que se resuelven en el presente capítulo. La ecuación de conservación de masa, momento y energía respectivamente (sin fuentes de calor en el fluido y despreciando la disipación viscosa):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right] = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.2)$$

$$\left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}T) \right] = \frac{1}{Pe} \nabla \cdot (\nabla T) \quad (3.3)$$

siendo  $\mathbf{u}$  es el campo velocidad microscópico del fluido,  $p$  la presión,  $T$  es la temperatura del fluido. Notar que el número  $Re = \rho UH/\mu$  y el número  $Pe = Re \cdot Pr$ , caracterizan el problema y las ecuaciones han sido adimensionalizadas con una velocidad  $U$  y una distancia  $H$ .

---

Para propósitos de validación, la herramienta numérica se implementa en una geometría y con condiciones de borde e iniciales apropiadas para obtener los resultados numéricos de los siguientes problemas: 1) estudio de la transferencia de calor en régimen laminar en la región de entrada de un canal de placas paralelas, considerando diferentes condiciones de borde en dicha región: flujo de calor uniforme o temperatura de pared constante; 2) estudio de la transferencia de calor en régimen laminar en un canal de placas paralelas con una expansión brusca.

En primer lugar, el código se prueba para un canal de placas paralelas con condiciones de flujo de calor uniforme, lo que permite evaluar el comportamiento de la herramienta numérica frente a esta condición de borde. Los resultados obtenidos se comparan con las soluciones numéricas de Nguyen [1992], evaluando la longitud de penetración térmica en función del número de Péclet. Luego, el comportamiento de la herramienta numérica frente a una condición de borde de temperatura constante se verifica mediante la comparación con resultados numéricos y analíticos obtenidos por Haji-Sheikh et al. [2008], para el número de Nusselt y para la temperatura media a la entrada del canal, ambos estudiados en función del número de Péclet. Finalmente, para evaluar el desempeño del código implementado frente a una geometría más compleja que la de un canal de placas paralelas, se obtienen resultados numéricos para un flujo laminar en un canal con una expansión brusca. Los resultados se comparan con los obtenidos por Kondoh et al. [1993] y por Lewis et al. [2004], para el número de Nusselt local en función de distintos parámetros, tales como el número de Reynolds, el número de Prandtl y la tasa de expansión geométrica del canal. En todos los casos se realizaron, además, estudios de convergencia de los esquemas numéricos implementados para el

término convectivo (*upwind* de primer y QUICK), lo cual permitió establecer un criterio para la elección del esquema y de las mallas que se utilizaron en las simulaciones del medio poroso.

En general, se puede decir que los resultados numéricos fueron reproducidos satisfactoriamente. Por lo tanto, el ejercicio de validación de la herramienta numérica muestra que el código implementado en este estudio es capaz de entregar resultados precisos o libres de errores de implementación. El ejercicio sirvió, además, para justificar la elección del esquema QUICK para el desarrollo de la herramienta numérica utilizada para el medio poroso. También se pudo justificar la elección de un arreglo de malla regular en la discretización de la geometría del medio poroso.

### **3.1 Simulaciones para un canal de placas paralelas con condiciones de flujo de calor uniforme.**

El análisis de la transferencia de calor en la región de entrada de un canal ha sido ampliamente estudiado, y una extensa compilación de soluciones es proporcionada por Shah y London [1978]. La mayoría de los estudios realizados asumen que las distribuciones de velocidad y de temperatura en la región de entrada son uniformes despreciándose la difusión axial tanto de cantidad de movimiento como de calor. En realidad, si se quiere calcular la tasa de transferencia de calor en la región cercana a la entrada, las condiciones de borde que se deben imponer son las de perfiles uniformes suficientemente lejos aguas arriba de dicha región. Por ejemplo, el efecto que origina la región de entrada en el caso de perfiles uniformes es el de incrementar la tasa de transferencia de calor. Y el efecto de la difusión axial en el flujo y en la transferencia de calor es sólo despreciable cuando estamos en un régimen de

altos números de Reynolds y Péclet (notar que si estos números no son altos se producen cambios en la velocidad axial y en los gradientes de temperatura en la entrada). Además, a bajo número de Reynolds y Péclet, la transferencia de calor depende fuertemente del número de Péclet (ver ecuaciones 3.1-3.3). Esto muestra que, a pesar de la simplicidad de la geometría del canal de placas paralelas, este problema es lo suficientemente complejo como servir de prueba para validación y testeo de nuevos códigos o esquemas numéricos.

A continuación se presentan los resultados del estudio numérico para el caso de convección forzada en la región de entrada a un canal de placas paralelas sujetas a la condición de flujo de calor uniforme. Los resultados se comparan con los obtenidos por Nguyen [1992], evaluando la longitud de penetración térmica en función del número de Péclet ( $Pe$ ), para  $1 \leq Pe \leq 1000$ .

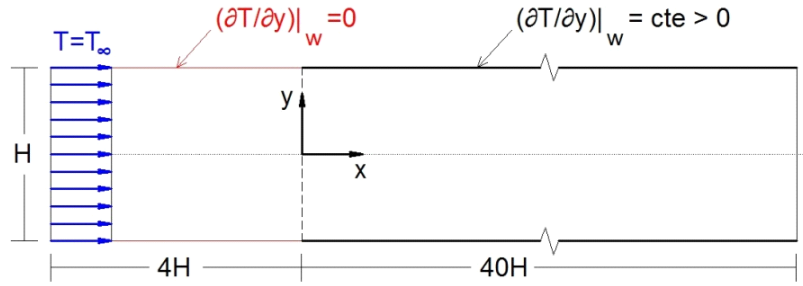
En presencia de una condición de borde de flujo de calor uniforme, la conducción axial dentro del fluido es constante y por lo tanto no afecta el número de Nusselt. Para el caso de placas paralelas, el número de Nusselt totalmente desarrollado ( $Nu_H$ ) es 8.2353 y es independiente del número de Péclet. Con esto, la longitud de penetración térmica ( $L_{th,H}^*$ ), que significa la distancia adimensional a la cual el Nusselt local ( $Nu_{x,h}$ ) es un 5% mayor al Nusselt desarrollado ( $Nu_H$ ), se define de la siguiente manera:

$$Nu_{x,H}(L_{th,H}^*) = 1.05Nu_H \quad (3.4)$$

Un esquema de la geometría, las condiciones iniciales y las condiciones de borde que se utilizaron en la simulación numérica se muestran en la figura 3.1, donde  $H$  es la altura del canal y donde se ve que aguas arriba de la sección de entrada a la zona calefaccionada ( $x=0$ ) se supone que las paredes del canal



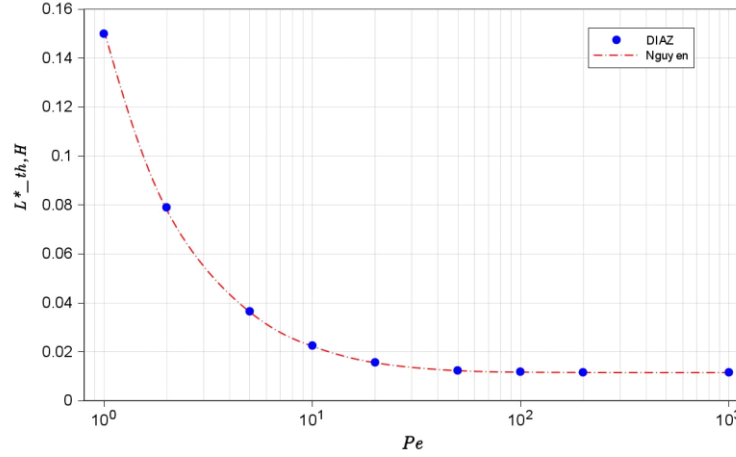
son adiabáticas. En las simulaciones realizadas se considera un flujo laminar y totalmente desarrollado (perfil parabólico), y además se supone un perfil de temperatura uniforme a una distancia  $4H$  aguas arriba de la sección calefaccionada, lo que permite una buena aproximación a la condición de borde real, la cual matemáticamente significa suponer que dicho perfil debe estar localizado en  $x=-\infty$ . El flujo se caracteriza por un número de Reynolds ( $Re$ ) definido en base al diámetro hidráulico del canal ( $2H$ ), que es fijo e igual a 10 para todos los casos simulados. Para la discretización espacial se utilizó un arreglo de malla regular de 3520 elementos en la dirección  $x$  y 40 elementos en la dirección  $y$ .



**Figura 3.1.** Geometría, condiciones iniciales y de borde para la simulación del canal con flujo de calor uniforme en las paredes.

El número de Nusselt totalmente desarrollado obtenido numéricamente fue 8.2362. Cabe notar que para el cálculo de ese parámetro se estudió la convergencia de la malla utilizada y se vio que este parámetro variaba a partir del sexto decimal al afinarse la malla al doble de elementos. El valor obtenido presenta una diferencia del 0,01% respecto al valor 8.2353 reportado por Shah y London [1978]. En todos los casos, el esquema numérico utilizado fue el esquema QUICK, decisión que se verifica con un posterior estudio del orden de convergencia del método numérico implementado. En la figura 3.2 se muestran los resultados obtenidos para la longitud de penetración térmica en función del

número de Péclet, que a su vez se comparan satisfactoriamente con los obtenidos por Nguyen [1992].



**Figura 3.2.** Longitud de penetración térmica en función del  $Pe$  (ec. 3.4). Los resultados obtenidos (DIAZ) se comparan con los reportados por Nguyen [1992].

El orden de convergencia del método numérico implementado para resolver la ecuación de la energía en este problema, se puede estimar, por ejemplo, utilizando el método de extrapolación de Richardson. Esta técnica permite la evaluación del orden de convergencia si se conocen las soluciones para tres mallas diferentes. El orden aparente de convergencia ( $p$ ) del método numérico [Freitas 2003], se evalúa en este caso utilizando la temperatura media (o global) evaluada en  $x=0$  como función de la discretización en  $y$ . La tabla 3.1 muestra el orden de convergencia  $p$  obtenido para diferentes mallas evaluando la temperatura media en la sección de ingreso, donde se comparan los esquemas *upwind* de primer orden (QUICK\_1) y el esquema QUICK de tercer orden (QUICK\_3), para el caso particular de  $Re=10$  y  $Pe=20$ . En todos los casos se utilizó un arreglo de malla regular.

**Tabla 3.1.** Orden de convergencia  $p$  determinado mediante la evaluación de la temperatura media en la sección de ingreso al canal para  $Re=10$  y  $Pe=20$  (extrapolación de Richardson).

i	N_elem	h_i	orden "p"	
			QUICK_1	QUICK_3
5	5	0.2		
4	10	0.1	1.00	2.43
3	20	0.05	1.00	2.11
2	40	0.025	0.99	2.06
1	80	0.0125		

Basados en la tabla 3.1, es justo concluir que el método numérico empleado para resolver la ecuación de la energía presenta un orden de convergencia cercano a 1 en el caso de grilla uniforme cuando se utiliza un esquema *upwind* de primer orden. En cambio, el orden aparente de convergencia en el caso de malla uniforme resulta cercano a 2 cuando el esquema numérico corresponde a QUICK. Debido a la mejora en la convergencia del esquema QUICK respecto al *upwind* de primer orden, y a que el costo en tiempo de cómputo del esquema de tercer orden no es significativamente mayor respecto al de primer orden, se optó por la elección de este último para estudiar la longitud de penetración térmica en función del número de Péclet, mostrado al inicio de la sección.

### 3.2 Simulaciones para un canal de placas paralelas con condiciones de temperatura de pared constante.

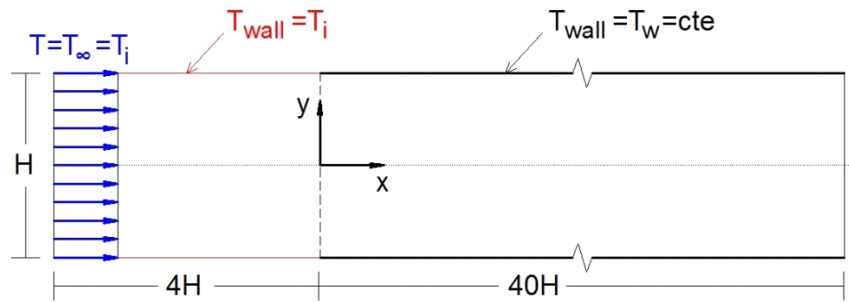
El análisis de la transferencia de calor en la región de entrada de un canal de placas paralelas, considerando los efectos de la conducción axial, ha sido ampliamente estudiado y, además, se conocen las soluciones en serie exactas que resuelven el problema. Se espera que la inclusión de la contribución de la conducción axial tenga un efecto apreciable en la transferencia de calor en la zona cercana a la región de entrada. Los resultados analíticos obtenidos por

Haji-Sheikh et al. [2008], muestran que el perfil de velocidad tiene un efecto relativamente pequeño en la transferencia de calor en la región de penetración térmica, y que en dicha zona, el transporte de energía se debe principalmente a la conducción térmica.

En esta sección se presentan los resultados del estudio numérico para el caso de convección forzada en la región de entrada a un canal de placas paralelas sujetas a la condición de temperatura de pared constante. Los resultados se comparan con los obtenidos por Haji-Sheikh et al. [2008], evaluando el número de Nusselt totalmente desarrollado y la temperatura media en la sección de ingreso, ambos en función del número de Péclet ( $Pe$ ), para el rango  $0.01 \leq Pe \leq 1000$ . Además se comparan los resultados obtenidos para la temperatura media adimensional ( $\theta_b$ ) en función de la posición axial para diferentes números de Péclet. Por una conveniencia matemática, se adopta la misma definición de  $\theta_b$  que en la bibliografía citada:

$$\theta_b = \frac{T_b - T_w}{T_i - T_w} \quad (3.5)$$

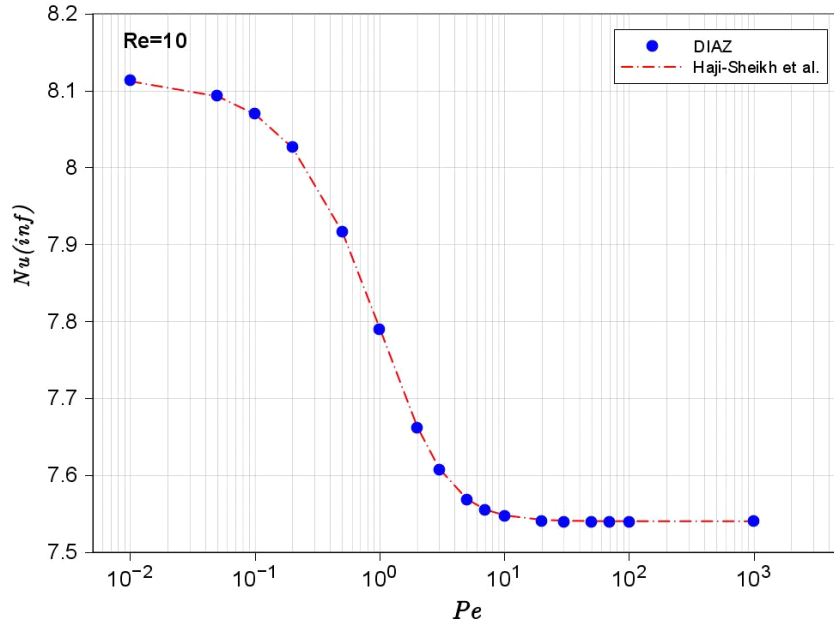
donde  $T_b$  es la temperatura media.



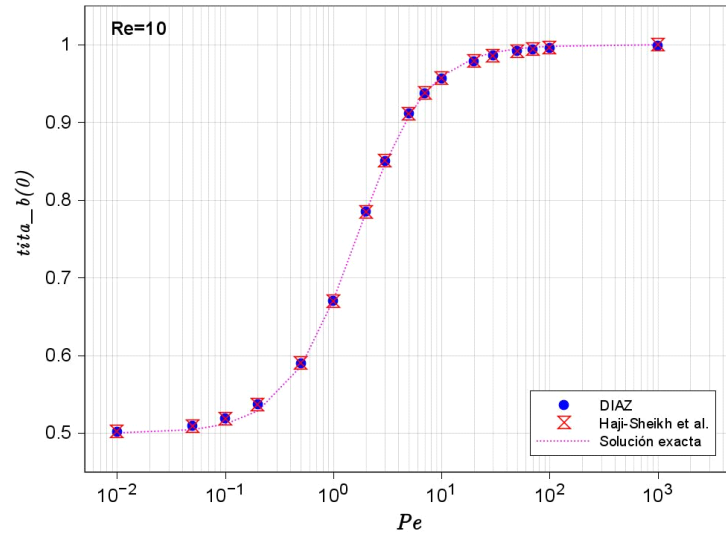
**Figura 3.3.** Geometría y condiciones de borde para la simulación del canal con temperatura de pared uniforme.

Un esquema de la geometría, las condiciones iniciales y las condiciones de borde que se utilizaron en la simulación numérica se muestra en la figura 3.3, donde nuevamente  $H$  es la altura del canal y donde se ve que aguas arriba de la sección de entrada ( $x=0$ ) se supone que las paredes del canal tienen una temperatura  $T_i$  que será menor a la temperatura de pared aguas abajo ( $T_w$ ) de dicha sección. En las simulaciones realizadas se considera un flujo laminar totalmente desarrollado (perfil parabólico), y además se supone un perfil de temperatura uniforme a una distancia  $4H$  aguas arriba de la sección de ingreso que posee la misma temperatura que la pared en esa zona. Esto permite una buena aproximación a la condición de borde utilizada por Haji-Sheikh et al. [2008], la cual supone que dicho perfil debe estar localizado en  $x=-\infty$ . El flujo se caracteriza por un número de Reynolds ( $Re$ ) definido en base al diámetro hidráulico del canal, igual a  $2H$ , que es fijo e igual a 10 para todos los casos simulados. Para la discretización espacial se utilizó un arreglo de malla regular de 3520 elementos en la dirección  $x$  y 40 elementos en la dirección  $y$ .

En la figura 3.4 se muestran los resultados obtenidos para el número de Nusselt totalmente desarrollado en función del número de Péclet. También se obtuvieron resultados para la temperatura  $\Theta_b$  evaluada en  $x=0$  (figura 3.5) donde se incluye también la solución analítica del problema obtenida por Shah y London [1978].

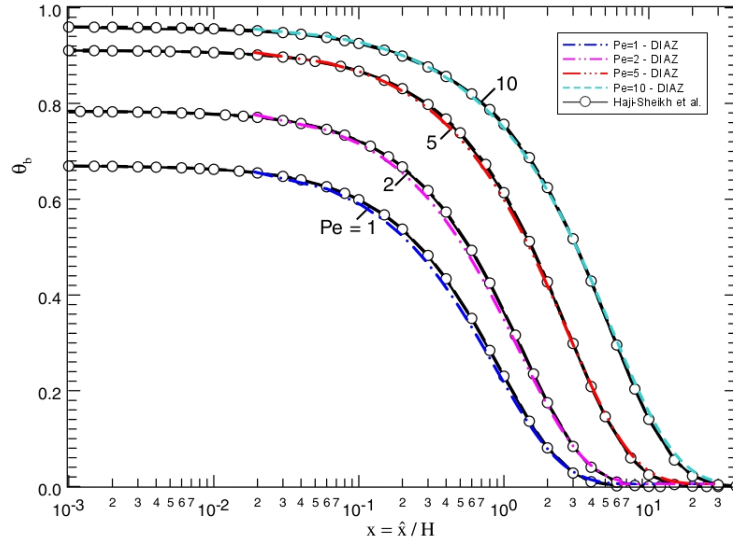


**Figura 3.4.** Número de Nusselt desarrollado en función del  $Pe$ . Los resultados obtenidos (DIAZ) se comparan con los reportados por Haji-Sheikh et al. [2008].



**Figura 3.5.** Temperatura  $\Theta_b(x=0)$  en función del  $Pe$ . Los resultados obtenidos (DIAZ) se comparan con los reportados por Haji-Sheikh et al. [2008], Shah y London [1978].

La figura 3.6 muestra los resultados obtenidos para la temperatura  $\Theta_b$ , evaluada en función de la posición axial  $x$ , en la zona aguas abajo de la región de ingreso, estudio que se realizó para diferentes números de Péclet. Observando las figuras 3.4, 3.5 y 3.6 se puede inferir que los resultados numéricos fueron reproducidos en forma muy satisfactoria.

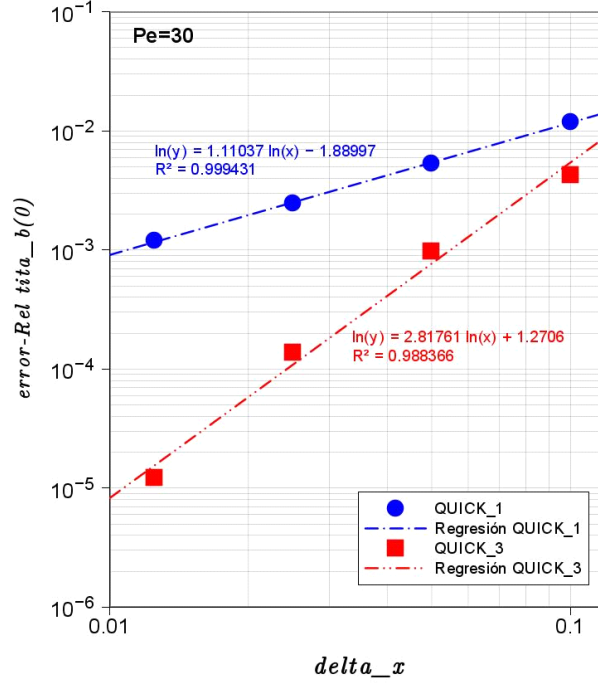


**Figura 3.6.** Temperatura  $\Theta_b$  en función de la posición axial  $x$  para diferentes  $Pe$ .

El orden de convergencia del método numérico implementado para resolver la ecuación de la energía en este problema, se puede estimar calculando el error de una solución numérica para la temperatura  $\Theta_b$  con respecto al valor de referencia, el cual se considera como el reportado por Haji-Sheikh et al. [2008]. En la figura 3.7 se muestran ambos esquemas convectivos utilizados y la regresión lineal de los resultados obtenidos, con la correspondiente ecuación resultante. Dicho estudio se realizó para el caso particular de  $Re=10$  y  $Pe=30$ , donde en todos los casos se utilizó un arreglo de malla regular.

Observando la figura 3.7 se puede concluir que el método numérico empleado presenta un orden de convergencia cercano a 1 en el caso de grilla uniforme cuando se utiliza un esquema *upwind* de primer orden. En cambio, el orden aparente de convergencia en el caso de malla uniforme resulta cercano a 3 cuando el esquema numérico corresponde a QUICK de tercer orden. Por las mismas razones que se mencionaron en el problema anterior (sección 3.1) se

optó por la elección del esquema de tercer orden para el estudio de los parámetros calculados en la presente sección.



**Figura 3.7.** Error porcentual como función de la discretización en  $x$  para la temperatura  $\theta_b(x=0)$ . El valor de referencia se asume que corresponde al reportado por Haji-Sheikh et al., [2008].

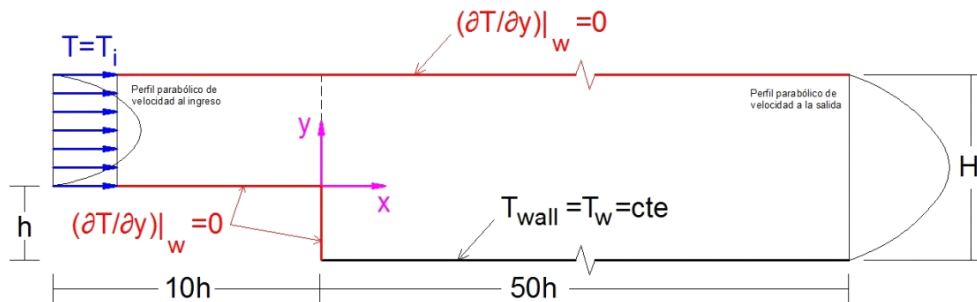
### 3.3 Simulaciones para un flujo laminar en un canal con expansión brusca.

El flujo recirculatorio en un canal rectangular con una expansión brusca (*backward-facing step*, BFS) es una de las geometrías más representativas donde la separación del flujo y su punto de encuentro ocurren. Dado que la geometría es sencilla y el comportamiento del flujo es relativamente complejo, un gran número de estudios se han realizado en relación a esta geometría. El fenómeno de separación del flujo de la corriente principal, debido a una expansión brusca en la geometría física, ejerce una importante influencia en el comportamiento de la transferencia de calor. En algunos casos el efecto es perjudicial, tales como zonas con sobre calentamientos, pero en otros es



beneficioso ya que se incrementa la transferencia de calor en las zonas cercanas a los puntos de recuentro. Los resultados obtenidos por Kondoh et al. [1993] para la transferencia de calor en esta geometría serán discutidos en los siguientes párrafos y muestran que: 1) la distribución del número de Nusselt local ( $Nu$ ) depende fuertemente del número de Reynolds ( $Re$ ), del número de Prandtl ( $Pr$ ), y de la razón de expansión del canal ( $ER$ ); 2) el pico de la distribución del número de Nusselt local no se encuentra necesariamente cerca del –o en el– punto de recuentro del fluido; 3) si el número de Prandtl es considerablemente bajo el pico no aparece, y tampoco se logra incrementar la transferencia de calor debido a que el campo de temperaturas es gobernado exclusivamente por la conducción térmica.

En esta sección se presentan los resultados del estudio numérico para el caso de convección forzada en un BFS. Luego de haber realizado una validación del código implementado en geometrías relativamente simples, el objetivo del presente estudio es evaluar el comportamiento de la herramienta numérica frente a la condición de separación de flujo que se origina por un cambio brusco en la geometría, tal como ocurre en la geometría del medio poroso a utilizar en los siguientes capítulos.



**Figura 3.8.** Geometría, condiciones iniciales y de borde para la simulación del flujo laminar en el BFS.

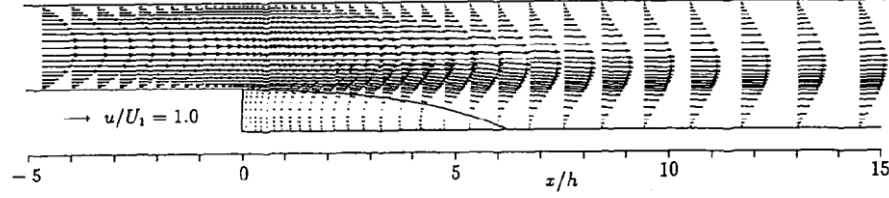
Un esquema de la geometría, las condiciones iniciales y las condiciones de borde que se utilizaron en la simulación numérica se muestra en la figura 3.8 y corresponden al caso estudiado por Kondoh et al. [1993]. En este caso  $H$  es la altura del canal aguas abajo de la expansión brusca ( $x=0$ ) y  $h$  la altura aguas arriba. Por lo tanto la razón de expansión del canal ( $ER$ ) se expresa como:

$$ER = \frac{H}{H-h} \quad (3.6)$$

En las simulaciones realizadas se considera al ingreso del canal un flujo laminar y totalmente desarrollado (perfil parabólico), y además se supone un perfil de temperatura uniforme a una distancia  $10h$  aguas arriba del salto. Tal como se muestra en la figura 3.8, todas las paredes son adiabáticas, excepto la pared  $y=-h$ ,  $x \geq 0$ , que es isotérmica y cuya temperatura se supone mayor a la de ingreso. La longitud del canal aguas abajo del salto se fija en  $50h$ , de tal manera que el flujo se pueda desarrollar y se pueda obtener un perfil parabólico a la salida. El flujo se caracteriza por un  $Re$  definido en base a la altura  $h$ . Para la discretización espacial se utilizó, en general, un arreglo de malla regular de 600 elementos en la dirección  $x$  y 30 elementos en la dirección  $y$ . Los resultados se comparan con los obtenidos por Kondoh et al. [1993] y por Lewis et al. [2004], estudiando los resultados en función de los diferentes parámetros que caracterizan el problema (el  $Re$ , el  $Pr$  y el  $ER$ ). Además se comparan cualitativamente los perfiles isotérmicos en función del  $Re$  y del  $Pr$ , obtenidos por Kondoh et al. [1993].

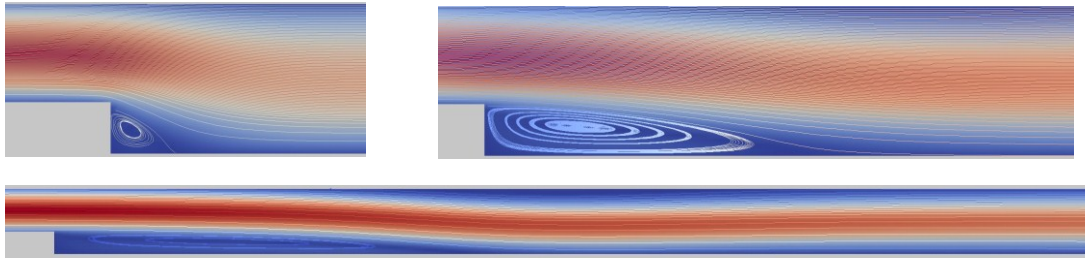
A modo de ejemplo del flujo que caracteriza el BFS, se muestra en la figura 3.9 un esquema del campo de velocidad alrededor del salto, obtenido por Kondoh et al. [1993], para el caso que consideramos referencia ( $ER=1.5$ ,

$Re=100$ ). El rencuentro del flujo se da en  $x/h=6.3$ , valor que es apenas mayor que la longitud  $x/h=6.0$  determinada experimentalmente [Morgan et al. 1984].



**Figura 3.9.** Esquema del campo de velocidad para  $ER=1.5$  y  $Re=100$  obtenido por Kondoh et al. [1993].

Las velocidades en la zona de recirculación son pequeñas, donde la máxima velocidad negativa es menor al 10% de la velocidad media del fluido que ingresa al canal. Se puede ver que aguas arriba del punto de rencuentro, el flujo sobre la pared inferior recupera el estado de completamente desarrollado a partir de  $x/h \approx 15$ . En la figura 3.10 se muestra una comparación visual de las líneas de corrientes para distintos  $Re$  obtenidas en nuestras simulaciones, donde se puede ver que la zona de recirculación se agranda a medida que este parámetro aumenta.

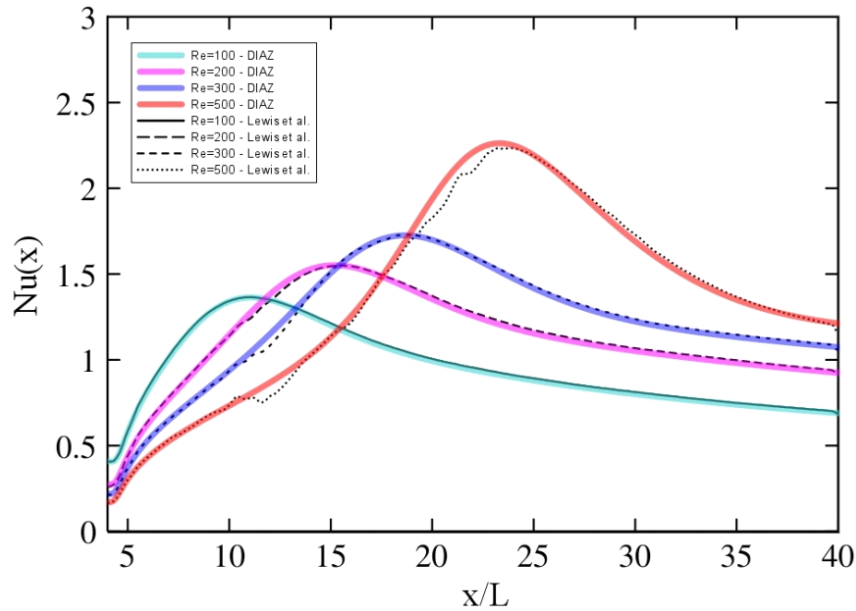


**Figura 3.10.** Comparación visual de las líneas de corriente para  $Re=10$ ,  $Re=100$ , y  $Re=500$ , para el caso  $ER=1.5$ . La escala de colores muestra la intensidad de la magnitud de la velocidad (rojo más intenso que azul).

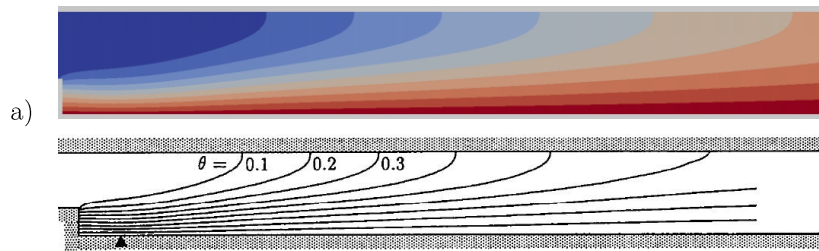
Desde el punto de vista de la transferencia de calor, la característica más importante es la cantidad de calor transferida a través del canal, la cual está representada por el número de Nusselt medio. El número de Nusselt local ( $Nu$ ) sobre la pared se calcula como:

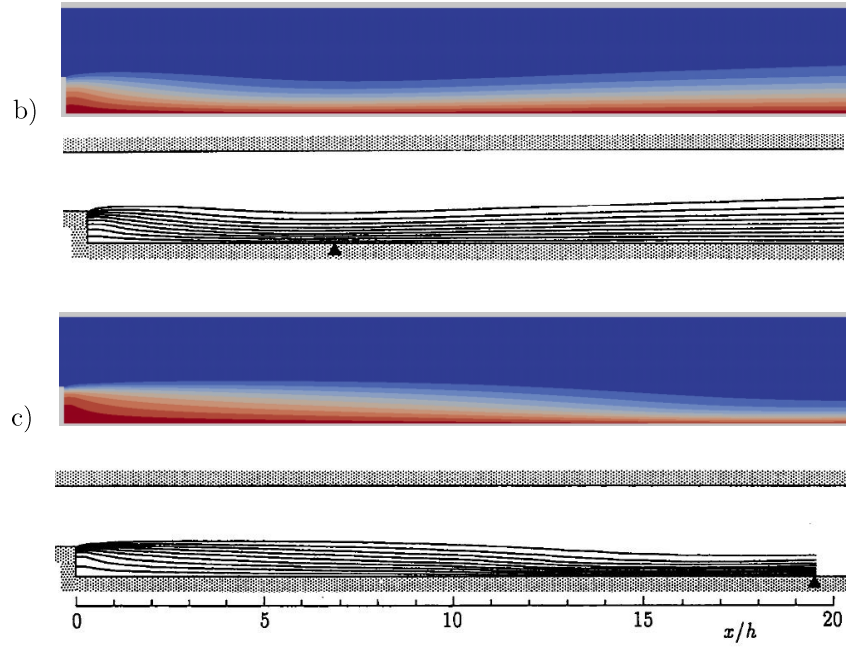
$$Nu = \frac{q \cdot H}{k_f \Delta T} \quad \text{donde} \quad q = -k_f \cdot \left( \frac{\partial q}{\partial n} \right)_{pared} \quad (3.7)$$

En la figura 3.11 se muestran los resultados obtenidos para el  $Nu(x)$  en función del  $Re$ , que a su vez se comparan con los obtenidos por Lewis et al. (2004), para el caso  $ER=1.5$  y  $Pr=0.7$ . El acuerdo de resultados es muy satisfactorio para todo el rango de  $Re$  simulado. Para el mismo caso se obtuvieron los perfiles isotérmicos en función del  $Re$ , los cuales se muestran en la figura 3.12 y donde se puede ver la comparación cualitativa con los perfiles obtenidos por Kondoh et al. [1993] para una temperatura adimensionalizada.



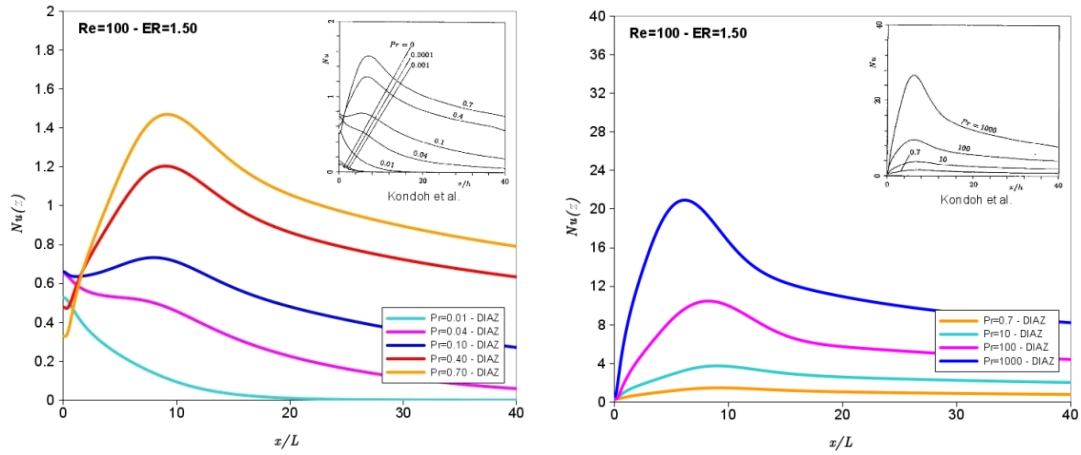
**Figura 3.11.** Influencia del  $Re$  en la distribución del  $Nu$  local ( $ER=1.5$ ,  $Pr=0.7$ ). Los resultados obtenidos (DIAZ) se comparan con los reportados por Lewis et al. [2004] para  $Re=100$ ,  $Re=200$ ,  $Re=300$ , y  $Re=500$ .





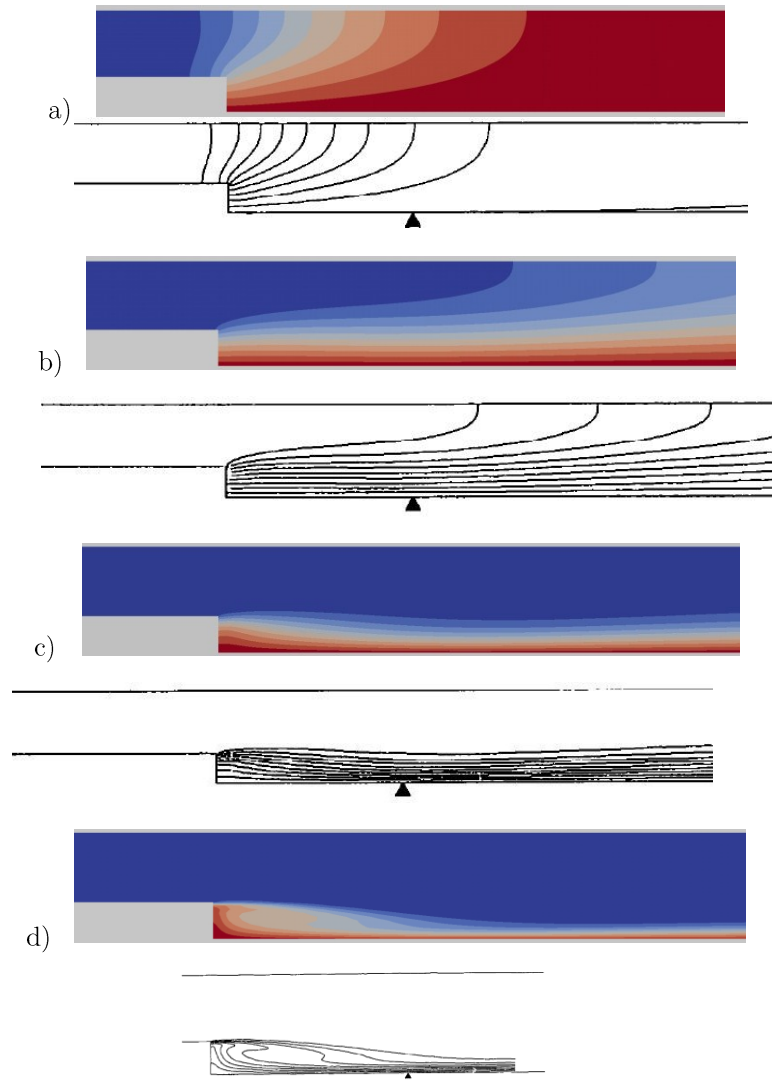
**Figura 3.12.** Influencia del  $Re$  en los perfiles isotérmicos ( $ER=1.5$ ,  $Pr=0.7$ ). Los resultados obtenidos (*arriba*) se comparan con los reportados por Kondoh et al., (1993) (*abajo*) para a)  $Re=10$ , b)  $Re=100$ , y c)  $Re=500$ .

El mismo estudio se realiza para la influencia del número de Prandtl ( $Pr$ ) en la distribución del  $Nu$ , donde los resultados para el caso  $ER=1.5$  y  $Re=100$  se muestran en las figuras 3.13 y 3.14. Dichos resultados se comparan satisfactoriamente con los obtenidos por Kondoh et al. [1993]. La mayor discrepancia se presenta para el  $Pe=10^5$ . En este caso nuestros resultados convergen a un máximo de  $Nu$  que decrece al aumentar el número de elementos de la malla por lo que podemos hipotetizar en función de este y otros resultados no presentados en este manuscrito que los resultados de Kondoh et al. podrían no están totalmente convergidos en malla. Notar que en nuestras simulaciones y para el caso  $Pe=10^5$  se utilizó una malla regular de  $1920 \times 72$  elementos.

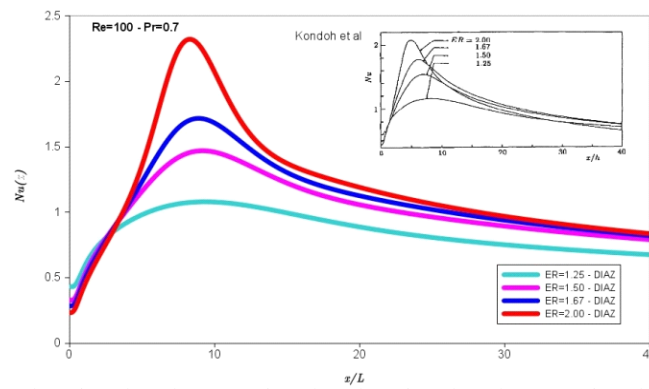


**Figura 3.13.** Influencia del  $Pr$  en la distribución del  $Nu$  local ( $ER=1.5$ ,  $Re=100$ ). Los resultados obtenidos (DIAZ) se comparan cualitativamente con los obtenidos por Kondoh et al. [1993], para  $Pr=0.01-0.70$  (izquierda) y  $Pr=0.70-1000$  (derecha).

La influencia de la tasa de expansión ( $ER$ ) en la distribución del  $Nu$  se estudia para el caso  $Pr=0.7$  y  $Re=100$ , y los resultados se muestran en las figuras 3.15 donde nuevamente se compara cualitativamente con los obtenidos por Kondoh et al. [1993].

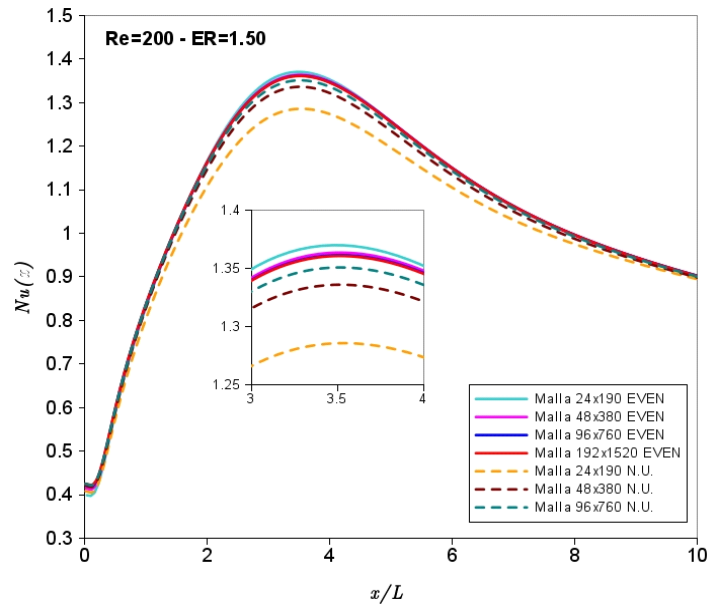


**Figura 3.14.** Influencia del  $Pr$  en los perfiles isotérmicos ( $ER=1.5$ ,  $Re=100$ ). Los resultados obtenidos (*arriba*) se comparan con los reportados por Kondoh et al. [1993] (*abajo*) para a)  $Pr=0.01$ , b)  $Pr=0.1$ , y c)  $Pr=0.7$ , y d)  $Pr=10$ .



**Figura 3.15.** Influencia del  $ER$  en la distribución del  $Nu$  local ( $Pr=0.7$ ,  $Re=100$ ). Los resultados obtenidos (DIAZ) se comparan cualitativamente con los obtenidos por Kondoh et al. [1993].

Observando las figuras 3.11-3.15 se puede concluir que los resultados numéricos fueron reproducidos satisfactoriamente. Se observa, sin embargo, que aunque la forma cualitativa de las curvas se reproduce razonablemente, el valor de los picos en el  $Nu$  puede diferir de los resultados encontrados en la literatura (ver figuras 3.13 o 3.15). Por lo tanto resulta de interés evaluar la sensibilidad de estos máximos o, en general, el comportamiento del  $Nu$  en función de la discretización espacial. En la figura 3.16 consideramos el caso  $Re=200$ ,  $ER=1.5$ ,  $Pr=0.7$  y mostramos el  $Nu$  para diferentes mallas uniformes y no uniformes (estas últimas con una discretización más fina en las paredes). Los resultados muestran que para nuestra implementación y para el caso con un  $Re$  y  $Pr$  discretos respecto al fenómeno convectivo, el máximo se encuentra prácticamente convergido con mallas relativamente finas, mayor a 20000 elementos para el caso de malla uniforme y con mallas más costosas para el caso no uniforme. Se concluye entonces que el pico es sensible al tamaño de la malla y requiere discretizaciones finas para altos  $Pe$  y  $Re$ .



**Figura 3.16.** Influencia de la discretización espacial en la distribución del  $Nu$  local ( $Pr=0.7$ ,  $Re=200$ ,  $ER=1.5$ ).



### **3.4 Conclusiones con respecto a la validación de la herramienta numérica.**

En el presente capítulo se validó la herramienta numérica mediante el estudio del comportamiento del código desarrollado en la resolución de problemas con diferentes condiciones de borde, situaciones de separación de flujo y diferentes geometrías. Este ejercicio de validación mostró que el código implementado es capaz de entregar resultados precisos y adecuados para el estudio a realizar.

Esto se llevó a cabo resolviendo numéricamente el problema de la transferencia de calor laminar en la región de entrada de un canal de placas paralelas, considerando las condiciones de borde tanto de flujo de calor uniforme como el caso de temperatura de pared constante. En el caso de flujo de calor uniforme se evaluó la longitud de penetración térmica en función del número de Péclet, comparándose con resultados numéricos obtenidos por Nguyen (1992). En cambio, para el caso de temperatura de pared constante, se estudió el número de Nusselt y la temperatura media a la entrada del canal en función del número de Péclet, cuyos resultados numéricos se verifican con los obtenidos por Haji-Sheikh et al. [2008]. En todos los casos se estudió el problema para un flujo laminar hidrodinámicamente desarrollado. Finalmente, para evaluar el desempeño del código frente a una geometría que presente el fenómeno de separación de flujo, se obtuvieron resultados numéricos para un flujo laminar en un canal con una expansión brusca en la entrada. Dichos resultados se comparan con los obtenidos por Kondoh et al. [1993] y por Lewis et al. [2004], para el número de Nusselt local en función de distintos parámetros, tales como el número de Reynolds, el número de Prandtl y la tasa de expansión geométrica del canal. En general, se puede decir que los

resultados numéricos fueron reproducidos satisfactoriamente. Además se realizaron estudios de convergencia de los esquemas numéricos implementados (esquemas *upwind* de primer y QUICK de tercer orden), lo cual permitió establecer criterios para la elección del esquema y de las mallas que se utilizaron en las simulaciones del medio poroso. Los estudios de convergencia en malla realizados mostraron que las implementaciones de los esquemas y condiciones de borde fueron correctas.

### 3.5 Bibliografía citada

- [Freitas 2003] C. J. Freitas, U. Ghia, I. B. Celik, P. Roache and P. Raad, *Asme`s quest to quantify numerical uncertainty*. AIAA Paper. 2003-0627.
- [Haji-Sheikh 2008] A. Haji-Sheikh, J. V. Beck and Donald E. Amos, (2008) *Axial heat conduction effects in the entrance region of parallel plate ducts*. Int. J. Heat Mass Transfer, **51**, 5811-5822.
- [Kondoh 1993] T. Kondoh, Y. Nagano and T. Tsuji, (1993) *Computational study of laminar heat transfer downstream of a backward-facing step*. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 36, No. **3**, pp. 577-591.
- [Lewis 2004] R. W. Lewis, P. Nithiarasu and K. N. Seetharamu, (2004) *Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow*. ISBN 0-470-84788-3.
- [Nguyen 1992] T. V. Nguyen, (1992) *Laminar Laminar heat transfer for thermally developing flow in ducts*. Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 35, No. **7**, 1733-1741.
- [Shah 1978] R. K. Shah and A. L. London, (1978) *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*. Academics Press. New York.



## Capítulo 4

### Determinación numérica del $h_{sf}$ :

Simulaciones microscópicas del flujo en las celdas representativas del medio poroso.

---

Para caracterizar la transferencia de calor en un medio poroso se necesitan variables macroscópicas tales con el coeficiente interfacial de transferencia de calor por convección ( $h_{sf}$ ). No sólo es necesario para completar la ecuación de la energía macroscópica, sino también da una idea de cómo se está llevando a cabo la transferencia de calor desde el sólido al fluido en el seno del medio poroso. En el presente capítulo se realizan simulaciones microscópicas con el fin de obtener el campo temperatura y poder calcular el  $h_{sf}$  con la técnica de promediado en el volumen de un elemento representativo del medio poroso. Esto permite estudiar el comportamiento de dicho parámetro en función de los números adimensionales que caracterizan el problema: el número de Reynolds y el número de Péclet y en función de las características del medio poroso. Las simulaciones se llevan a cabo resolviendo el campo de velocidades y la ecuación de la energía con la herramienta numérica desarrollada y descrita en el capítulo 2, considerando dos condiciones de borde para la temperatura en el sólido: temperatura de pared constante o flujo de calor uniforme.

Típicamente, se resuelve el problema en cuestión sobre una celda representativa (*Representative Elementary Volume* o REV) donde se imponen condiciones de periodicidad. Nosotros, en cambio, proponemos un dominio compuesto por varios REV's permitiendo de esta manera el desarrollo espacial

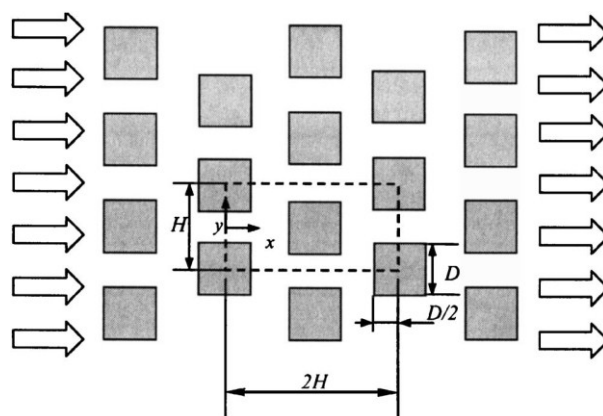
de las variables. Los resultados mostraron una fuerte dependencia del  $h_{sf}$  con la porosidad, siendo este parámetro mayor a medida que la porosidad disminuye. También se observó que los resultados para el  $h_{sf}$  con el flujo desarrollado térmicamente concuerdan aceptablemente con la correlación universal para el  $h_{sf}$  determinada por Kuwahara et al. [2001]. Adicionalmente, en el rango de Reynolds estudiado, se puede ver una independencia del  $h_{sf}$  respecto a este parámetro.

Otro aspecto que se estudió fue el efecto que tiene la elección del REV sobre el cual se calcula el  $h_{sf}$ . Se observa que esta elección afecta significativamente el valor del  $h_{sf}$  a medida que el  $Pe$  disminuye. Debido a que los valores reportados en la bibliografía no tienen en cuenta dicho efecto, al considerar un único REV para el cálculo, se propone un método alternativo para calcular un valor de  $h_{sf}$  que sea independiente de la celda unitaria que define el medio poroso.

## 4.1 Modelo físico del medio poroso

La medición de las características del flujo y de la transferencia de calor dentro del espacio libre en un medio poroso es una tarea difícil. Sin embargo, el comportamiento macroscópico de los materiales porosos se puede obtener integrando la distribución de las variables de interés en la escala del poro. Con el fin de llevar a cabo tal metodología, es conveniente la utilización de modelos físicos que consideren al medio poroso compuesto por un arreglo ordenado de obstáculos, en lugar, por ejemplo, de un modelo de partículas sólidas aleatoriamente distribuidas [Kaviany 1995].

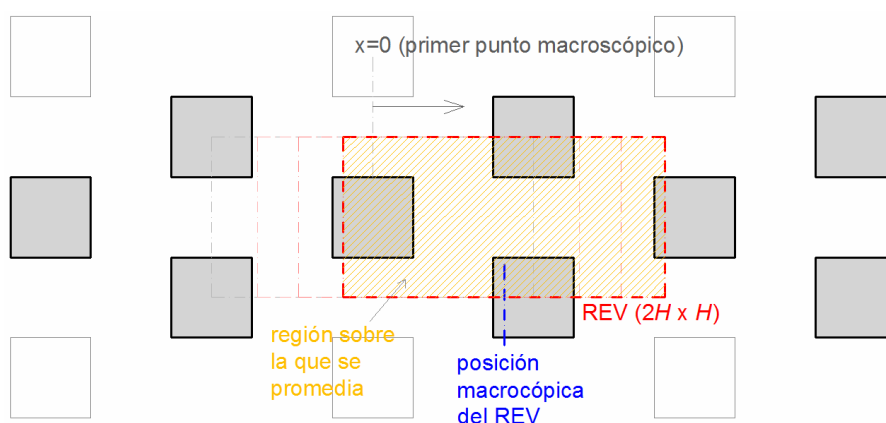
En este estudio seguiremos los pasos del trabajo realizado por Kuwahara et al. [2001]. Estos autores modelaron al medio poroso en términos de obstáculos cuadrados dispuestos regularmente en un patrón escalonado, tal como se muestra en la figura 4.1, y resolvieron numéricamente el set de ecuaciones gobernantes (Navier-Stokes y ecuación del calor) en una unidad o REV de dicho arreglo imponiendo para ello condiciones de bordes periódicas en los perfiles de temperatura y velocidad. Para calcular parámetros macroscópicos tales como el coeficiente interfacial de transferencia de calor por convección para un régimen totalmente desarrollado, utilizaron la técnica de promediado espacial en el volumen en sólo un REV de acuerdo al modelo macroscópico presentado en el capítulo 1.



**Figura 4.1.** Modelo físico de un medio poroso propuesto por Kuwahara et al. [2001].

En este trabajo entonces se calcula el coeficiente interfacial de transferencia de calor por convección ( $h_{sf}$ ) con la técnica de promediado espacial en el volumen, pero, a diferencia de Kuwahara et al. [2001], se simula el medio poroso en un dominio que permite el desarrollo espacial de los parámetros macroscópicos. El objetivo del presente capítulo es estudiar el desarrollo espacial de los parámetros macroscópicos a medida que el flujo se desarrolla hidrodinámica y térmicamente, y analizar la dependencia de los

valores estacionarios de estos parámetros en función de la posición del REV en el medio poroso. Lo dicho anteriormente se esquematiza en la figura 4.2, donde vemos que la variable macroscópica  $x$  describe la posición o centro del REV (que posee el mismo tamaño que el que se muestra en la figura 4.1) sobre el cual se efectúa la integración en el volumen para determinar los parámetros macroscópicos. También vemos que para  $x=0$ , o múltiplo de  $H$ , la posición del REV coincide con la posición simulada por Kuwahara et al. [2001].



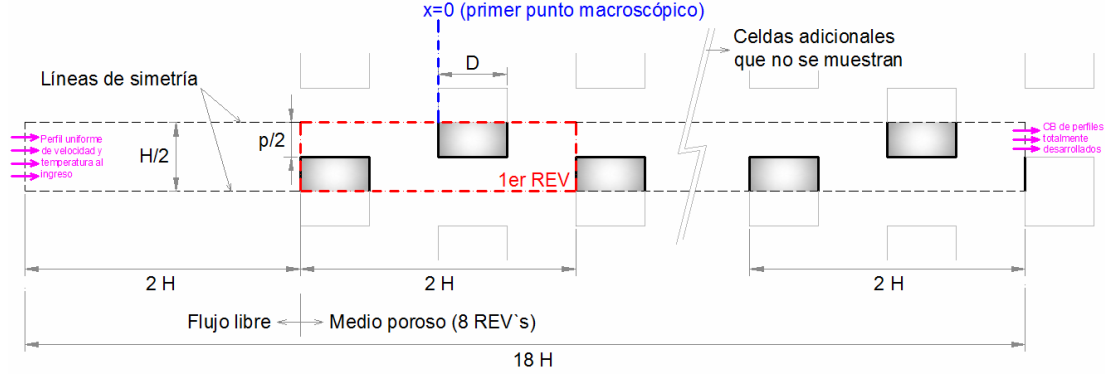
**Figura 4.2.** Posición macroscópica del REV sobre el cual se efectúa el promediado de las variables microscópicas. Cuando  $x=0$  o múltiplo de  $H$  la posición del REV coincide con la propuesta por Kuwahara et al. [2001].

## 4.2 Simulaciones numéricas

El dominio de las simulaciones numéricas realizadas en nuestro caso se esquematiza en la figura 4.3. La dirección del fluido es de izquierda a derecha, ingresando al medio poroso después de recorrer una distancia  $2H$ . Dicho medio poroso se extiende una distancia de  $16H$  (es decir, ocho REV's en fila), haciendo que la longitud del dominio en la dirección del flujo de ingreso sea  $18H$ . Para ahorrar tiempo computacional, y basados en la simetría del campo de velocidad, se simula sólo la mitad inferior del REV ( $H/2$ ) en la dirección



vertical. Por lo tanto, deben aplicarse condiciones de borde de simetría sobre las líneas horizontales que definen el dominio.



**Figura 4.3.** Geometría del dominio simulado para el caso de un flujo uniforme que ingresa al medio poroso ( $18H \times H/2$ ).

Además de las condiciones de simetría impuestas a los bordes horizontales del dominio, se requiere la definición de las condiciones de borde al ingreso y a la salida. Las condiciones impuestas para el campo de velocidad se discuten en Teruel [2007] pero pueden resumirse como flujo uniforme en la entrada, periodicidad en el flujo y en la presión a la salida respecto a la posición  $-2H$  de la salida. Para la temperatura se impone un perfil plano a la entrada. En cambio, para definir la condición de borde a la salida se impone sobre el último REV la condición que surge de suponer que, en el estado completamente desarrollado, los perfiles de temperatura a la entrada y a la salida deben ser similares. Esto significa que, para el caso de temperatura de pared constante, la condición de borde impuesta sobre el último REV se expresa como:

$$(T - T_W)|_{x=2H} = \tau(T - T_W)|_{x=0} \quad (4.1)$$

siendo

$$\tau = \frac{(T_B - T_W)|_{x=2H}}{(T_B - T_W)|_{x=0}} \quad (4.2)$$

donde  $T_B$  es la temperatura media (o *bulk* del inglés). Esta condición de periodicidad es la que se utilizaría, por ejemplo, en un canal de placas paralelas y es la que utiliza Kuwahara et al. [2001] para resolver el problema en la celda unitaria que considera. Nosotros verificamos en nuestras simulaciones que lejos del borde derecho del dominio y con el flujo desarrollado térmicamente  $\tau$  es constante y por lo tanto es válido imponer (4.1) como condición de borde a derecha. Para el caso de flujo de calor uniforme, en cambio, la condición de borde surge del balance de energía sobre dicho REV, lo que significa que para todo  $y$  del dominio se debe cumplir:

$$T(x, y)|_{x=2H} = T(x, y)|_{x=0} + \Delta T_{REV} \quad (4.3)$$

siendo

$$\Delta T_{REV} = \frac{\int_{\partial REV} q'' dA}{\rho c_P \int_{In-Out} u dA} \quad (4.4)$$

#### 4.2.1 Parámetros y mallas

Basados en los resultados obtenidos por Kuwahara et al. [2001], el coeficiente interfacial de transferencia de calor depende fuertemente de tres números adimensionales: la porosidad, el número de Reynolds ( $Re=Q/\nu$ , donde  $Q$  es el caudal másico) y el número de Péclet ( $Pe=Re \cdot Pr$ ). Por lo tanto, para estudiar la influencia de estos parámetros, se llevan a cabo un total de 54 simulaciones: tres porosidades (95, 75 y 55%), tres  $Re$  (0.01, 1 y 100) y tres  $Pe$  (0.01, 1 y 100); todas ellas realizadas para los casos de temperatura de pared constante o flujo de calor uniforme. Cabe destacar que en todos los casos se evaluó la conservación de la energía realizando un balance de entrada-salida de esta cantidad para descartar posibles errores de implementación, verificándose en todos los casos con valores menores al 1% de la energía ingresada.

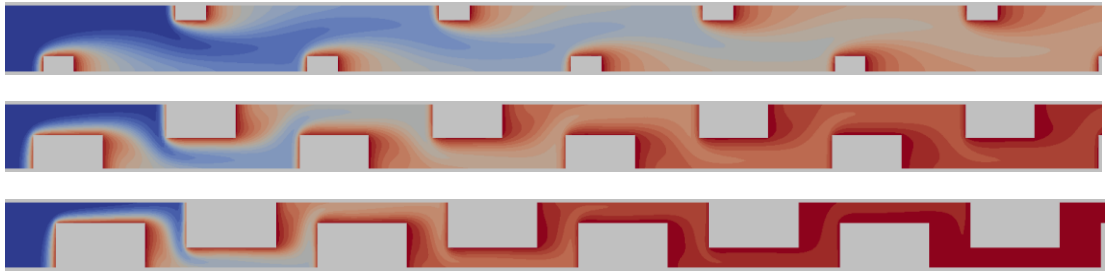
Para las tres porosidades estudiadas, el dominio se discretizó con un arreglo de malla regular. Las mallas utilizadas para las porosidades de 95, 75 y 55% fueron respectivamente (sentido horizontal x sentido vertical): 1296 x 36, 864 x 24 y 1944 x 54. Se verificó que los resultados macroscópicos o promediados en volumen eran prácticamente independientes del tamaño de la malla. Para esto se realizó el cálculo de la temperatura media en distintas posiciones del dominio utilizando diferentes mallas. Se observó que los errores relativos de la malla elegida respecto a una con el doble de elementos eran menores al 1% en todas las posiciones. Con el mismo procedimiento se evaluó el desempeño de mallas no uniformes con  $Pe=Re=100$  y una porosidad del 75%, y se vio que el error relativo de éstas eran menores al 0,5% comparadas con una uniforme del mismo número de elementos.

Para resolver numéricamente la ecuación de la energía se utilizó la herramienta numérica desarrollada. El esquema numérico utilizado fue en todos los casos *upwind* de tercer orden. En las simulaciones realizadas la convergencia de la temperatura se monitoreaba en términos de los residuos normalizados, donde el máximo residuo permitido antes de la convergencia fue de  $10^{-6}$ . El estado estacionario se lograba cuando el residuo total de la temperatura era menor a  $10^{-9}$ .

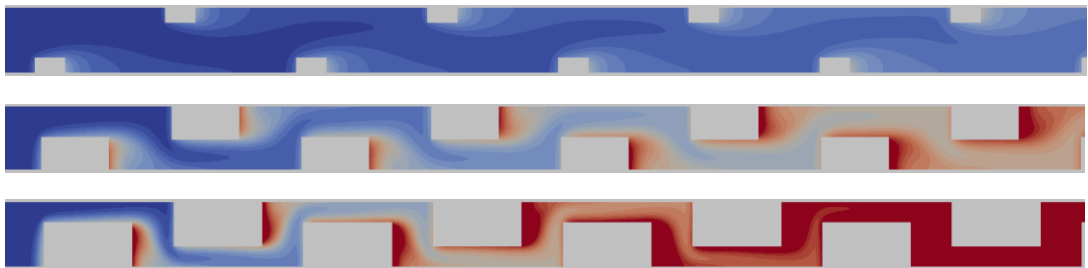
#### 4.2.2 Resultados microscópicos

Aunque el propósito del estudio es analizar los resultados macroscópicos que se obtienen de la simulación microscópica, es importante mostrar la evolución espacial del campo de temperatura en el medio poroso para facilitar la comprensión de los valores promediados que se presentarán posteriormente. En las figuras 4.4 - 4.5 se muestra la distribución de los perfiles isotérmicos

obtenidos para las dos condiciones de borde que se estudian: la de temperatura de pared constante y la de flujo de calor uniforme, respectivamente. Los perfiles isotérmicos obtenidos se muestran para las tres porosidades simuladas considerando el caso de  $Re=100$  y  $Pe=100$ . Para cada condición de borde se puede ver que a menor porosidad, mayor es la temperatura promedio para el mismo flujo másico, es decir, mismo  $Re$ . Este comportamiento indica que la transferencia de calor desde el sólido al fluido se mejora (mayor  $h_{sf}$ ) a medida que la porosidad disminuye, hecho que puede estar justificado por la mayor superficie de intercambio sólido-fluido a menores porosidades.



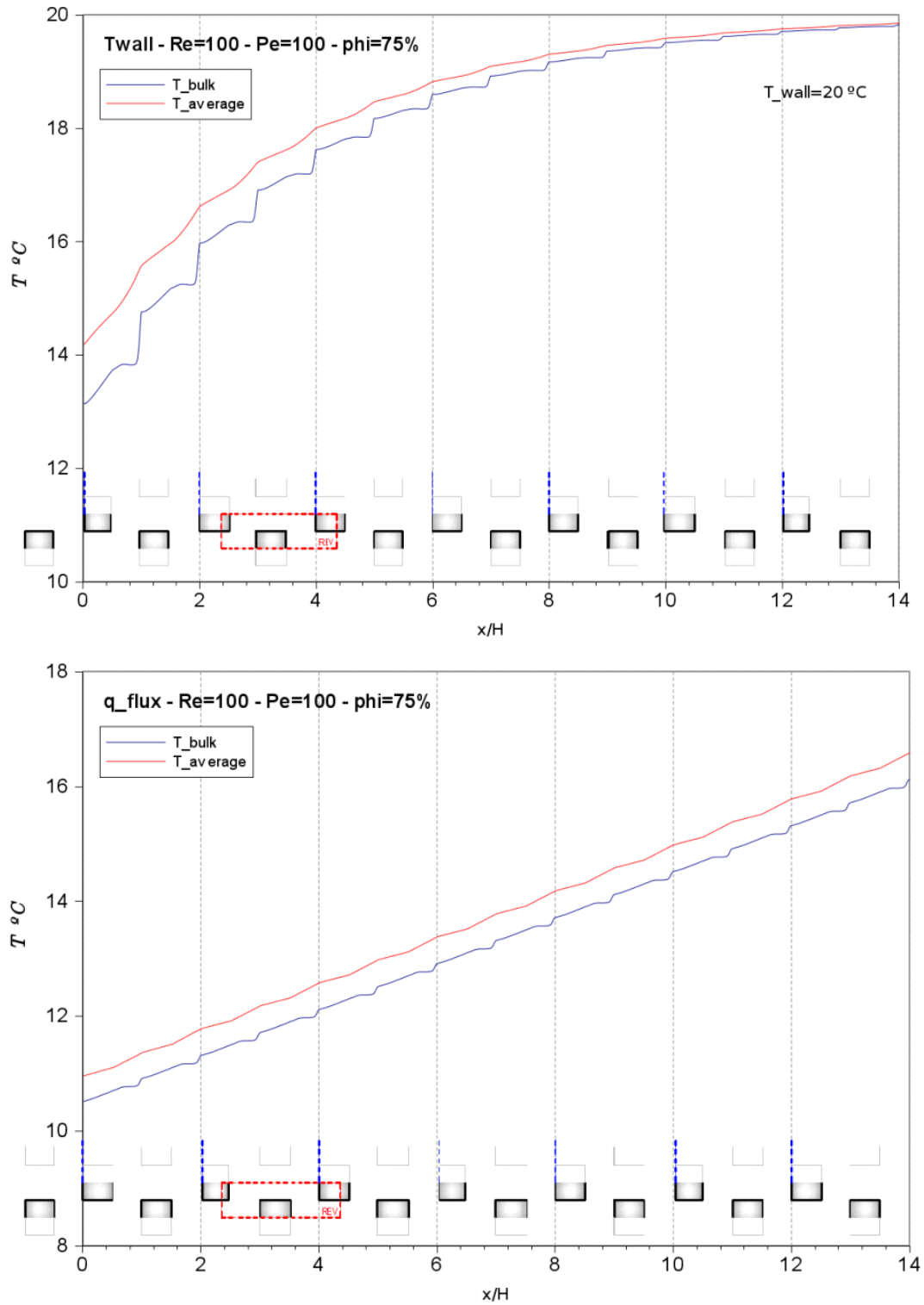
**Figura 4.4.** De arriba hacia abajo, distribución de la temperatura microscópica para el caso de temperatura de pared constante ( $Re=100$ ,  $Pe=100$ ), para una porosidad de 95, 75 y 55% respectivamente (el fluido se mueve de izquierda a derecha). La escala de color corresponde a azul=10 °C y rojo=20 °C.



**Figura 4.5.** De arriba hacia abajo, distribución de la temperatura microscópica para el caso de flujo de calor uniforme en las paredes ( $Re=100$ ,  $Pe=100$ ), para una porosidad de 95, 75 y 55% respectivamente (el fluido se mueve de izquierda a derecha). La escala de color corresponde a azul=10 °C y rojo=10.5 °C.

La evolución espacial de los parámetros macroscópicos que resultan de la técnica de promediado en el volumen (el de un REV en este caso) se espera que presente un buen comportamiento. Esto significa que su evolución espacial

sea suave y de algún modo independiente del tamaño del REV sobre el cual se promedia. A modo de verificar la hipótesis de suavidad, en la figura 4.6 se muestra la evolución espacial de la temperatura promedio ( $\langle T_{av} \rangle$ ) en función del parámetro macroscópico  $x$  comparado con el valor de la temperatura media local ( $T_{bulk}$ ) evaluado en el mismo punto  $x$ . La comparación se realiza para las dos condiciones de borde consideradas. En la figura 4.6 vemos que el comportamiento de la temperatura promedio es claramente más suave que la temperatura media local, la cual es sensible a los cambios bruscos que presenta la geometría (notar que el cero de la abscisa corresponde al cero de la figura 4.3). Otra característica interesante que se puede observar, es que el comportamiento de las curvas es análogo al que se espera en el caso estacionario de un canal con las mismas condiciones de borde. Esto es, en el caso de temperatura de pared constante, todas las temperaturas tienden asintóticamente al valor de la pared, y en cambio, en presencia de flujo de calor uniforme en las paredes, se puede demostrar que todas las temperaturas suben linealmente con la misma pendiente.



**Figura 4.6.** Evolución de la temperatura promedio y de la temperatura media en función de la variable macroscópica  $x$  para el caso de temperatura de pared constante (arriba) y para flujo de calor constante (abajo). Para una porosidad de 75%,  $Re=100$  y  $Pe=100$ .

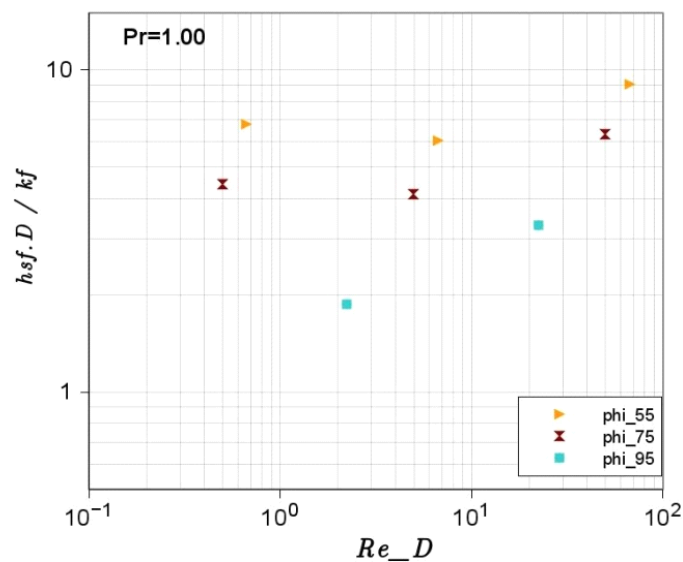
### 4.3 Resultados macroscópicos

A continuación se muestran los resultados obtenidos para el coeficiente interfacial de transferencia de calor ( $h_{sj}$ ) calculado con la técnica de promediado en el volumen de un solo REV. Recordamos que el  $h_{sf}$  presentado en este trabajo se calcula como:

$$h_{sf} = \frac{\frac{1}{\Delta V} \int_{A_{sf}} k_f \nabla T d\vec{A}}{a_{sf}(\langle T \rangle_s - \langle T \rangle_f)} \quad (4.5)$$

En primer lugar se estudia dicho parámetro calculándolo en un REV cuya posición macroscópica coincide con la celda unitaria que se estudia en Kuwahara et al. [2001], de tal forma de poder comparar ambos resultados. Como el dominio de la simulación numérica está compuesto por 8 REV's en fila, para decidir sobre cuál de ellos se promediaba para obtener el valor macroscópico de  $h_{sj}$ , se estudió el desarrollo espacial y se observó en todos los casos, que a partir del tercer-cuarto REV se llegaba al valor desarrollado del mismo. Por lo tanto, el criterio que se utilizó fue el calcular los valores en el séptimo REV. A continuación se presentan los resultados del estudio de la dependencia del  $h_{sf}$  con el número de Reynolds para distintos  $Pe$  y distintas porosidades. Notar que utilizamos  $Re_D = \langle \mathbf{u} \rangle D / \nu = Re \cdot D / H$  por concordancia con la literatura. Los resultados para el caso de flujo de calor uniforme se muestran en la figura 4.7, donde se estudia para el caso de  $Pr=1$  y para las tres porosidades (55, 75 y 95%). Para el caso de 95% y  $Re=0.01$  no se pudo determinar el  $h_{sf}$  por que el desarrollo térmico espacial se lograba en el primer REV y se perdía sensibilidad para calcularlo. La figura 4.8 muestra en cambio, los resultados para el caso de temperatura de pared constante, que se realizaron para tres  $Pe$  (0.01, 1 y 100) y para las tres geometrías consideradas.

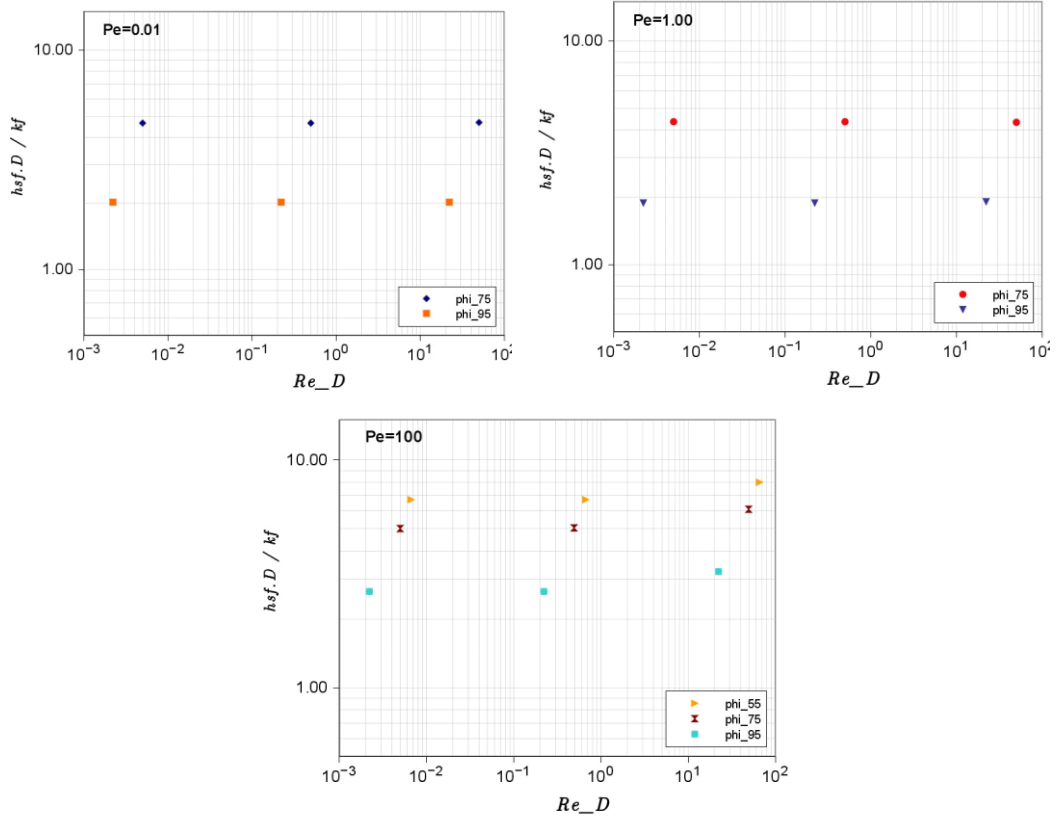
Observando las figuras 4.7 - 4.8 vemos que se cumple la hipótesis de una mejor transferencia de calor por convección a menores porosidades. Para el caso de flujo de calor uniforme (figura 4.7) vemos que para las porosidades de 55 y 75% el  $h_{sf}$  presenta un mínimo a partir del cual la transferencia mejora. Este mínimo también se espera para la porosidad de 95%, pero en el presente trabajo no pudo ser observado ya que no se realizaron simulaciones para  $Re_D$  menores a 0.01.



**Figura 4.7.** Efecto del  $Re_D$  en el  $h_{sf}$  para el caso de flujo de calor uniforme. Para una porosidad de 55, 75 y 95%,  $Pr=1$ .

Siguiendo con el caso de temperatura de pared constante (figura 4.8) observamos que fijando la porosidad y el  $Pe$ , el  $h_{sf}$  es independiente del  $Re_D$ . Pero, en un régimen de altos  $Pe$ , como en el caso de  $Pe=100$ , vemos que esta independencia se pierde observando que la transferencia mejora hacia  $Re_D$  altos. Observando la figura 4.8 también vemos que a bajos  $Pe$  el  $h_{sf}$  es independiente de este parámetro, aumentando la transferencia cuando nos movemos hacia en régimen de altos  $Pe$ .



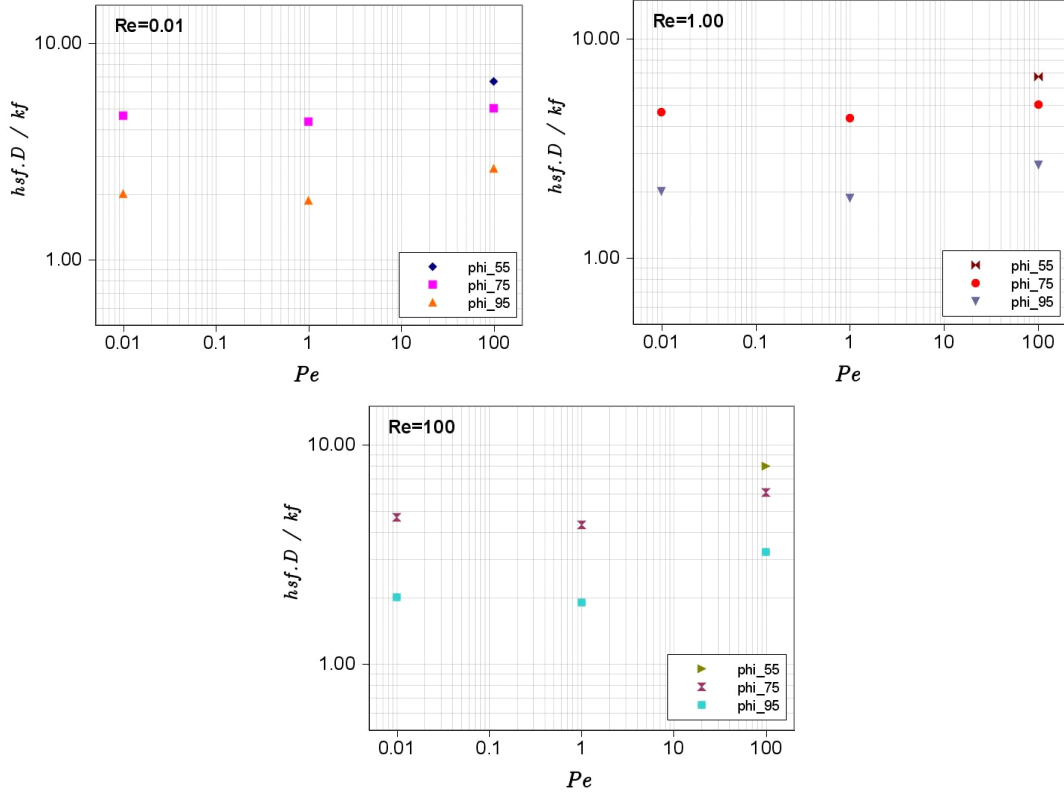


**Figura 4.8.** Efecto del  $Re_D$  en el  $h_{sf}$  para el caso de temperatura de pared constante. Para una porosidad de 55, 75 y 95%,  $Pe=0.01-100$ .

Para corroborar este comportamiento a continuación se muestran los resultados del estudio de la dependencia del  $h_{sf}$  con el  $Pe$ . Dichos resultados se muestran en la figura 4.9 para el caso de temperatura de pared constante, donde apreciamos nuevamente la independencia del  $h_{sf}$  respecto al  $Re_D$ . Análogamente al comportamiento para caso de flujo de calor uniforme, en la dependencia del  $Pe$  para el caso de temperatura de pared constante, también se observa la aparición de un mínimo a partir del cual se mejora la transferencia de calor.

Luego de una extensa compilación de resultados numéricos, Kuwahara et al. [2001] propone una expresión para el cálculo del  $h_{sf}$  utilizando una correlación propuesta por Wakao y Kaguei [1982] de la forma

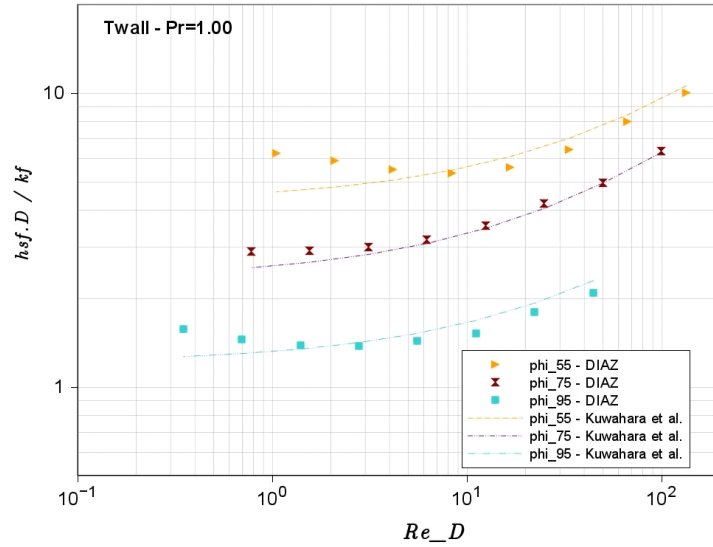
$h_{sf}D/k_j = a + b \cdot Re^{0.6} \cdot Pr^{1/3}$  válida para un rango de porosidades ( $0.2 \leq \phi \leq 0.9$ ), resultando  $a = 1 + 4(1-\phi)/\phi$  y  $b = 1/2 \cdot (1-\phi)^{1/2}$  que corresponde a la ecuación 1.10 que se presenta en el capítulo 1.



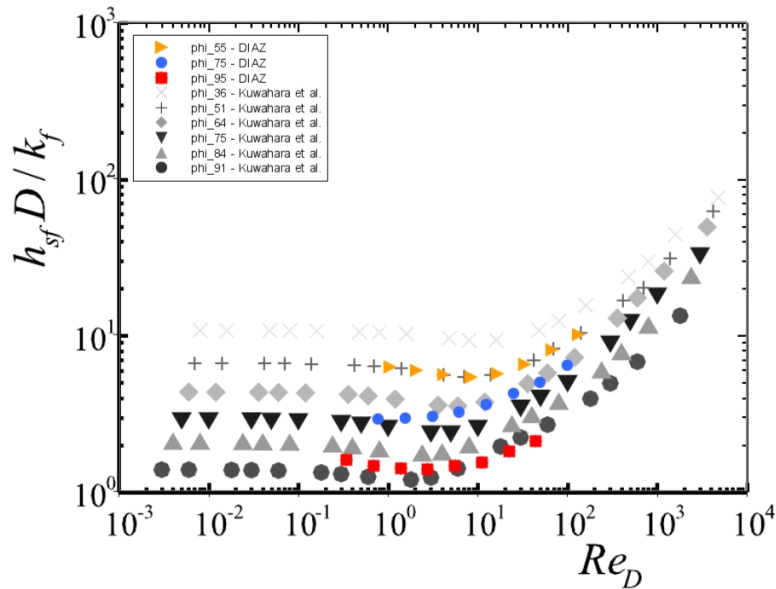
**Figura 4.9.** Efecto del  $Pe$  en el  $h_{sf}$  para el caso de temperatura de pared constante. Para una porosidad de 55, 75 y 95%,  $Re_D = 0.01-100$ .

Esta expresión vale para el caso de temperatura de pared constante. En la figura 4.10 se muestra la comparación de los resultados obtenidos con dicha correlación. Vemos que los valores calculados se ajustan razonablemente para  $Re_D$  mayores a 10, pero a Reynolds bajos, no se logra un buen ajuste, de hecho la correlación no tiene en cuenta el mínimo que aparecen en las porosidades de 55 y 95%. Por lo tanto se comparan los resultados obtenidos en el presente trabajo con los resultados numéricos que obtiene Kuwahara et al. [2001]. Dicha comparación se muestra en la figura 4.11, donde vemos que para una porosidad de 55% los valores obtenidos son muy cercanos a los obtenidos por Kuwahara

et al. [2001] para una porosidad del 51%, lográndose reproducir el mínimo que se encuentra para un  $Re_D$  cercano a 10. Comparando los valores obtenidos para una porosidad del 75% vemos que en nuestro caso el mínimo no aparece, pero en cambio sí habría una coincidencia si se los proyectan hacia Reynolds altos o bajos.



**Figura 4.10.** Efecto del  $Re_D$  en el  $h_{sf}$  para el caso de temperatura de pared constante. Los resultados obtenidos (DIAZ) se comparan con la correlación propuesta por Kuwahara et al. [2001].



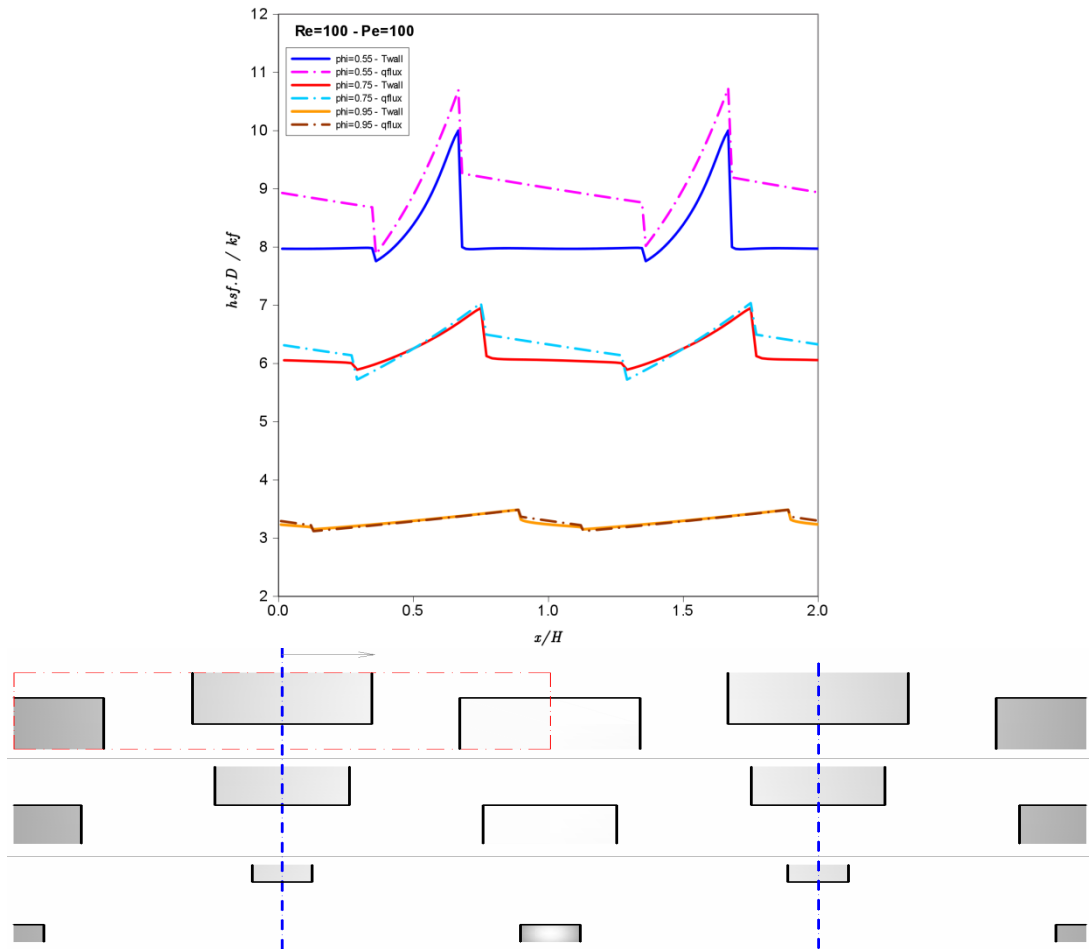
**Figura 4.11.** Efecto del  $Re_D$  en el  $h_{sf}$  para el caso de temperatura de pared constante y  $Pr=1$ .

Observando las figuras 4.10 – 4.11 se puede decir que ambos cálculos coinciden razonablemente y tal como se mencionó previamente, vemos que a menor porosidad, mayores valores de  $h_{sf}$  se obtienen. También se observa un aumento de éste para Reynolds mayores, y además que a partir de cierto  $Re_D$  hacia abajo, la transferencia de calor se independiza de este parámetro, pasando por una zona en la cual se hace mínima.

#### 4.3.1 Variación del $h_{sf}$ con la posición del REV

Tal como se mencionó en la motivación del presente trabajo, a continuación se presentan los resultados obtenidos para el  $h_{sf}$  calculado en un REV de tamaño  $2H \times H/2$  cuya posición se mueve una distancia  $2H$  en la dirección axial. Los resultados se muestran en la figura 4.14 para el caso de temperatura de pared constante y flujo de calor uniforme, simulados para las tres porosidades y para el caso de  $Re=100$  y  $Pe=100$  (notar que los resultados corresponden a la zona de flujo macroscópico desarrollado térmicamente). Para el caso  $x=0$ ,  $x=H$  y  $x=2H$ , la posición del REV coincide con la celda que estudia Kuwahara et al. [2001]. De la observación de los resultados obtenidos vemos que el  $h_{sf}$  presenta una variación dependiente de la posición del REV, la cual posee dos posiciones en la cual la distribución presenta un pico cuyo efecto es más importante a medida que disminuye la porosidad. Para el caso de temperatura de pared constante observamos una meseta entre ambos picos, que está mejor definida a medida que la porosidad se hace menor. Notar que en esta zona está la posición del REV que utiliza Kuwahara. El comportamiento espacial del  $h_{sf}$  observado, contrasta con los resultados obtenidos por ejemplo por Kuwahara et al. [2001] o Saito y de Lemos [2005], ya que en los trabajos mencionados se reporta un único valor. Adicionalmente, es interesante notar

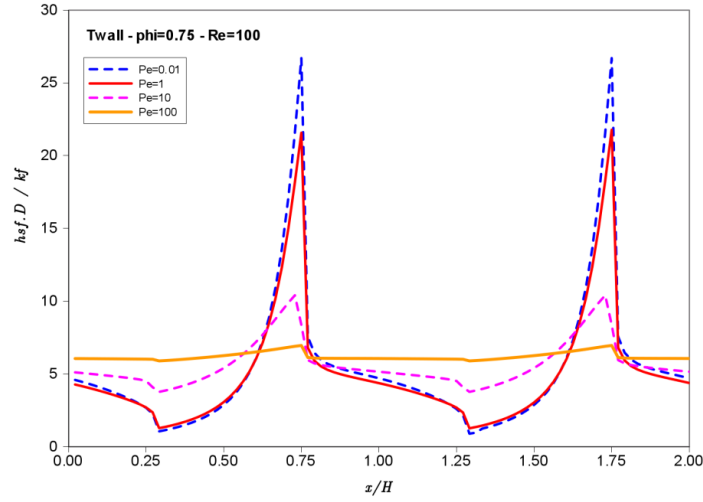
que por ejemplo en Saada et al. [2006] se calculan parámetros macroscópicos utilizando un REV desplazado respecto al de Kuwahara et al. [2001] con lo que se esperaría obtener un resultado diferente. En particular y respecto a Kuwahara et al., éste valor podría considerarse subestimado ya que corresponde, como se dijo anteriormente, al valor que se calculó en la meseta de la distribución que se muestra en las figuras.



**Figura 4.14.** Efecto de la posición del REV en el  $h_{sf}$  para el caso de temperatura de pared constante y flujo de calor uniforme, para las tres porosidades estudiadas ( $Re=100$ ,  $Pe=100$ ).

También observamos que los valores de  $h_{sf}$  resultan mayores para el caso de flujo de calor uniforme que para el caso de temperatura de pared constante, y nuevamente verificamos la hipótesis de mayor transferencia de calor a menor porosidad. En la figura 4.15 se muestran los resultados del estudio de la

dependencia del  $Pe$  en la distribución espacial del  $h_{sf}$ . Vemos que a menores  $Pe$  los picos se hacen mayores, por lo que la forma de dicha distribución se podría justificar por la presencia de la conducción axial, que es mayor a medida que el  $Pe$  disminuye.



**Figura 4.15.** Efecto del  $Pe$  en la distribución espacial del  $h_{sf}$  para el caso de temperatura de pared constante para una porosidad del 75% y  $Re=100$ .

El comportamiento encontrado para el  $h_{sf}$  en función de la posición del REV sobre el cual se lo calcula, muestra que éste se ve afectado significativamente a medida que el  $Pe$  disminuye. Por lo tanto se propone la revisión del método y la necesidad de un modelo que tenga en cuenta la variación espacial de  $h_{sf}$ . Como resultado preliminar proponemos en la siguiente sección un método para realizar este cálculo considerando a modo de ejemplo, el caso de temperatura de pared constante.

#### 4.3.2 Método propuesto para el cálculo del $h_{sf}$

Para calcular el  $h_{sf}$  que mejor represente el comportamiento macroscópico de la temperatura promedio, el método propone calcularlo a través de la conservación de la energía y a través del cálculo del calor

transferido desde el sólido al líquido promediado en el REV ( $\langle q_{average} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\text{REV}} \mathbf{k}_f \nabla T d\vec{A}$ ). Por analogía con un canal isotérmico, se espera para el  $q_{average}$  en función de la variable macroscópica  $x$ , un comportamiento en forma de decaimiento exponencial, con algunas variaciones dada por la geometría compleja del medio poroso. Dado que el objetivo es ajustar la cantidad de energía transferida, se efectúa el ajuste de la curva  $q_{average}(x)$  para que dicha energía transferida presente la misma pendiente que la observada pero que esté desplazada de manera de tener la misma área bajo la curva. Esto nos permite construir una cantidad que preserva la cantidad de energía transferida y que a su vez está caracterizada por la misma dependencia espacial observada para la cantidad original. El planteo matemático del método se puede resumir de la siguiente manera: analizando la ecuación macroscópica de la energía presentada en el capítulo 1 (ec. 1.6) para el estado estacionario y despreciando el término difusivo, la ecuación queda

$$\phi \rho c_p \langle u \rangle^f \cdot \frac{d\langle T \rangle^f}{dx} = h_{sf} a_{sf} (\langle T \rangle^s - \langle T \rangle^f) \quad (4.6)$$

donde se pueden agrupar todas las constantes y ver que la solución para la variable macroscópica  $x$  es de la forma:

$$\langle T \rangle^f(x) = \langle T \rangle^s + (T_0 - \langle T \rangle^s) e^{-\beta h_{sf} x} \quad (4.7)$$

donde  $T_0$  es la temperatura de ingreso del fluido y  $\langle T \rangle^s$  es la temperatura de la pared. Modelando al calor transferido como un decaimiento exponencial de la forma:

$$\langle q \rangle_{average}(x) = B e^{-Ax} \quad (4.8)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes convenientes para las unidades, entonces, por la definición del  $h_{sf}$  dada en la ecuación 4.5, de las ecuaciones (4.7) y (4.8) se obtiene una nueva definición para el cálculo de  $h_{sf}$  dada por:

$$h_{sf} = \frac{Be^{-Ax}}{(T_0 - \langle T \rangle^s)e^{-\beta h_{sf}x}} \quad (4.9)$$

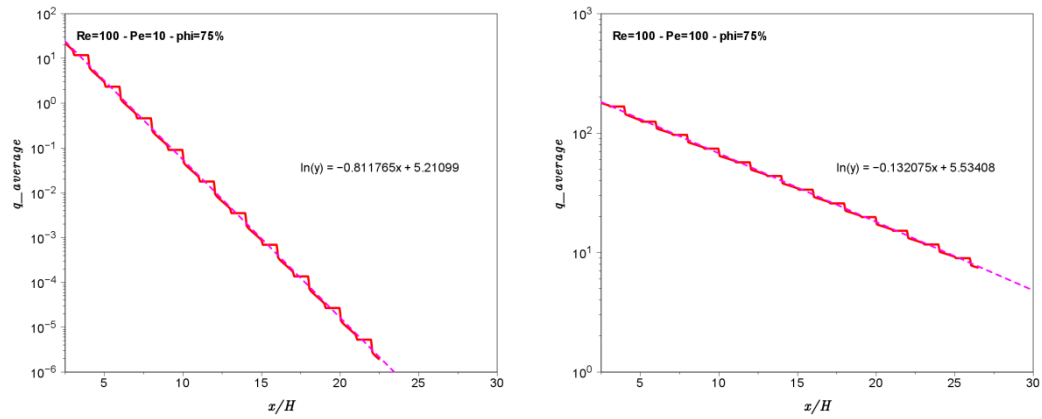
Por lo tanto, para el estado térmicamente desarrollado, es decir, en el estado que la relación dada por la ecuación 4.9 no depende de la variable  $x$ , se debe cumplir que:

$$h_{sf} = \frac{A}{\beta} \quad (4.10)$$

De la última expresión vemos que con la determinación de  $A$ , que es la pendiente adimensional de la caída exponencial del calor transferido alcanza para determinar el valor desarrollado de  $h_{sf}$ . Notar que el rol de  $\beta$  es ajustar las unidades del problema.

Para comparar este método con el utilizado por Kuwahara et al. [2001], construimos el modelo macroscópico con los coeficientes calculados por ambos métodos para el caso de temperatura de pared constante,  $Re=100$ ,  $Pe=1-10-100$  y porosidad del 75%. En primer lugar calculamos el calor transferido del sólido al líquido y promediado en el REV en función de  $x$ , para luego efectuar el ajuste y calcular la pendiente  $A$ . Tales resultados se muestran en la figura 4.16. En la tabla 4.1 se muestran los resultados obtenidos por el método propuesto en este trabajo comparados con los resultados que se obtienen utilizando el REV en la posición que propone Kuwahara et al. [2001].





**Figura 4.16.** Calor transferido del sólido al líquido y promediado en el REV en función de  $x$ . Para el caso de temperatura de pared constante y una porosidad del 75%,  $Re=100$  y  $Pe=10$ -100.

**Tabla 4.1.** Comparación del método propuesto con el método de Kuwahara. Para el caso de temperatura de pared constante y una porosidad del 75%,  $Re=100$  y  $Pe=10$ -100.

Caso	$h_{sf\_REV\_Kuwahara} \cdot D/k_f$	$h_{sf\_calculado} \cdot D/k_f$	diferencia
Pe=10	5.110	4.059	20.58%
Pe=100	6.060	6.604	-8.98%

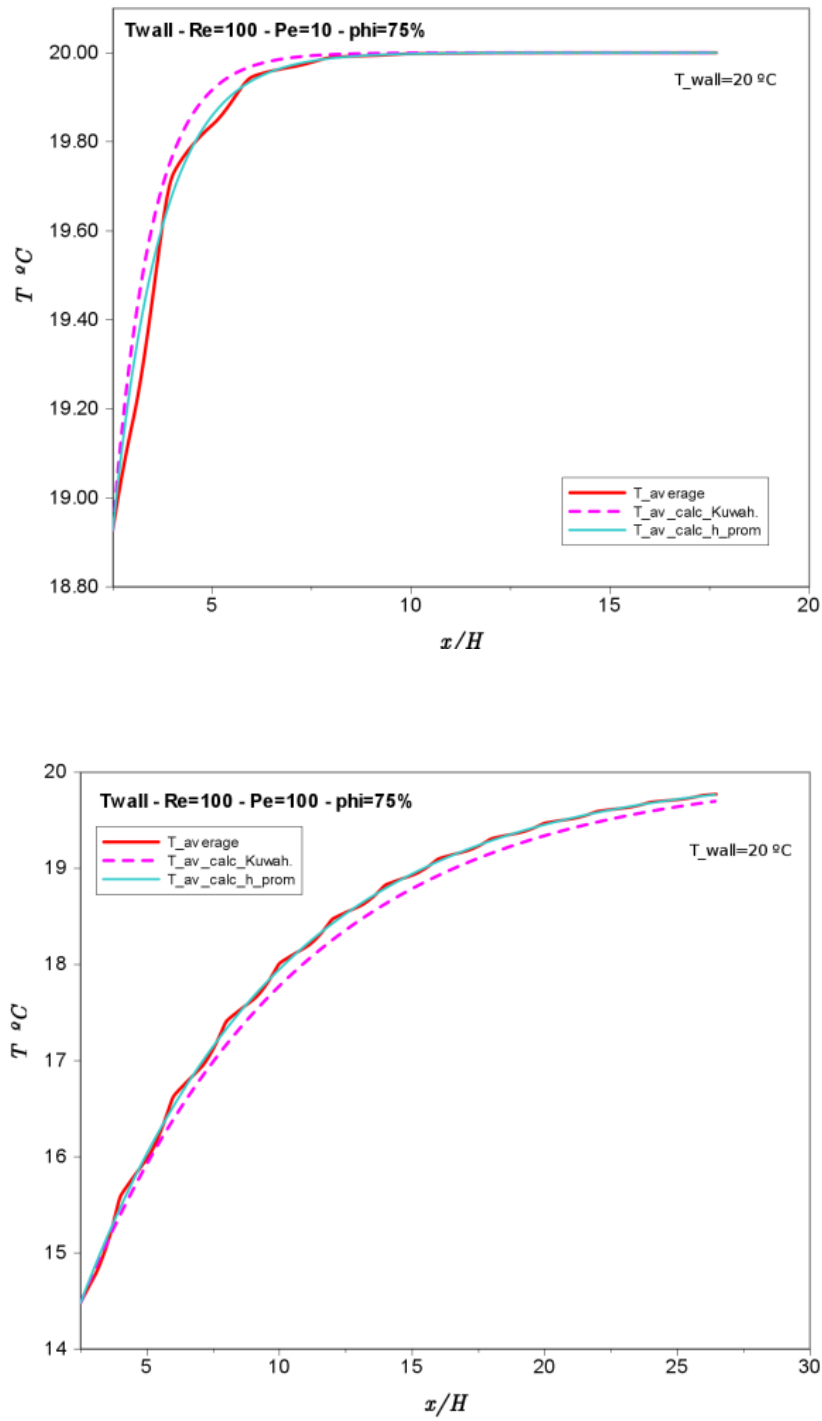
Queda para trabajos futuros evaluar la conveniencia de obtener este parámetro como se propone y una forma alternativa en caso de disponer de resultados basados en una única celda representativa. Notar que en nuestro estudio hemos asumido que el proceso de transferencia de calor no tiene componente difusiva en la dirección axial (asumiendo una funcionalidad para el campo macroscópico de temperaturas como en la ecuación 4.6). En la siguiente sección comparamos a modo de ejemplo los resultados que pueden obtenerse utilizando el modelo macroscópico en comparación con el promedio volumétrico de los resultados microscópicos.

### 4.3.3 Comparación de la señal macroscópica y modelo unidimensional

A modo de evaluar las capacidades de un modelo macroscópico como el que se intenta enriquecer en este trabajo, evaluamos como se comportaría un

modelo unidimensional simple basado en el coeficiente calculado respecto al promedio espacial de la temperatura obtenido de las simulaciones microscópicas. Si consideramos solamente el modelo macroscópico sin difusión axial (ecuación 4.6), la temperatura macroscópica en función de la posición responde a la ecuación 4.7. Utilizando los valores de la tabla 4.1, representamos en la figura 4.17 los valores de la temperatura promedio obtenidos en función de  $x$ , comparadas con los modelos macroscópicos que se obtienen del  $h_{sf}$  calculado con el método propuesto y con el que se obtiene en el REV que propone Kuwahara. Los resultados se muestran para el caso de temperatura de pared constante y una porosidad del 75%,  $Re=100$  y  $Pe=10-100$ .

Vemos que el acuerdo es bueno y reconocemos la importancia de tener un parámetro como el  $h_{sf}$  que permite con un modelo elemental obtener una distribución de temperaturas adecuada.



**Figura 4.16.** Calor transferido del sólido al líquido y promediado en el REV en función de  $x$ . Para el caso de temperatura de pared constante y una porosidad del 75%,  $Re=100$  y  $Pe=10$ -100.

## 4.4 Conclusiones respecto a los resultados

En el presente capítulo se llevaron a cabo simulaciones microscópicas con el fin de obtener el campo temperatura y poder calcular el coeficiente interfacial de transferencia de calor en un medio poroso bidimensional. Se utilizó la técnica de promediado en el volumen de un elemento representativo de dicho medio poroso. Esto posibilitó el estudio del comportamiento de dicho parámetro en función de los números adimensionales que caracterizan el problema, tales como el número de Reynolds, el número de Péclet y la porosidad. Las simulaciones se llevaron a cabo resolviendo la ecuación de la energía con la herramienta numérica desarrollada en el capítulo 2, donde se consideraron las condiciones de borde de temperatura de pared constante o flujo de calor uniforme.

En primer lugar se resolvió el problema eligiendo un elemento representativo del medio poroso tal como lo sugiere Kuwahara et al. [2001]. Se resolvió el problema en un dominio compuesto por varias unidades repetidas permitiendo el desarrollo espacial de las variables involucradas. Los resultados mostraron una fuerte dependencia del coeficiente interfacial con la porosidad, siendo mayor a medida que la porosidad disminuía. También se observó que los resultados concuerdan aceptablemente con la correlación universal para dicho coeficiente determinada por Kuwahara et al. [2001]. En el rango de Reynolds estudiado no se observó una dependencia del  $h_{sf}$  respecto a este parámetro.

En segundo lugar se estudió el efecto que tiene la elección del REV y se observó que la elección afecta significativamente el valor del  $h_{sf}$  a medida que el  $Pe$  disminuye. Debido a este efecto se encuentra que los valores reportados en la bibliografía podrían estar subestimados al considerar el REV que usualmente

se utiliza. Por lo tanto se propuso un método alternativo para el cálculo de este parámetro en el caso disponer resultados para más de un REV. La comparación entre el modelo unidimensional y el promedio de la temperatura microscópica resultó satisfactoria.

## 4.5 Bibliografía citada

- [Kaviany 1995] M. Kaviany, (1995). *Principles of Heat Transfer in Porous Media*, 2nd edn, Springer, New York.
- [Kuwahara 2001] F. Kuwahara, M. Shirota and A. Nakayama, (2001) *A numerical study of interfacial convective heat transfer coefficient in two-energy equation model for convection in porous media*. Int. J. Heat Mass Transfer, **44**, 1153-1159.
- [Saada 2006] M. A. Saada, S. Chikh and A. Campo, (2006) *Analysis of hydrodynamic and thermal dispersion in porous media by means of a local approach*. Heat Mass Transfer, **42**, 995-1006.
- [Saito 2005] M. B. Saito and M. J. S. de Lemos (2005) Interfacial heat transfer coefficient for non-equilibrium convective transport in porous media. *Int. Comm. Heat and Mass Transfer*, **32**, 667-677.
- [Teruel 2007] F. E. Teruel, *Macroscopic turbulence modeling and simulation for flow through porous media*. Tesis doctoral, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2007.
- [Wakao 1982] N. Wakao, and S. Kaguei, *Heat and mass transfer in packed beds*. Gordon and Breach, New York, 1982.

## Capítulo 5

### Conclusiones

---

Los modelos macroscópicos empleados para describir la transferencia de energía en medios porosos son de interés en diversas aplicaciones de la ingeniería ya que simplifican en gran medida la descripción del problema a tratar. En contrapartida, estos modelos requieren de parámetros macroscópicos que en general son desconocidos, por lo que la obtención de éstos y el estudio de su dependencia en relación a los parámetros que definen el problema revisten un particular interés. Motivados en lo anterior, en el presente trabajo se propuso un método de cálculo de dichos coeficientes a partir de experimentos numéricos en celdas periódicas representativas de un medio poroso bidimensional simple (cuadrados desplazados).

En el primer capítulo se describe la motivación y el objetivo del trabajo. Además, se presenta el modelo matemático básico, las definiciones y los conceptos necesarios utilizados en la literatura actual para la descripción de flujos macroscópicos y para el cálculo de coeficientes de interés. Se muestra como opción pertinente la posibilidad del uso de simulaciones numéricas para enriquecer el modelo macroscópico, y por esto se desarrolla una herramienta numérica.

En el capítulo 2 se describió el desarrollo de tal herramienta para resolver el transporte de un escalar pasivo. Esto permitió calcular parámetros macroscópicos, tales como el coeficiente interfacial de transferencia de calor, a partir de los resultados que se obtienen de una simulación a nivel microscópico

en celdas periódicas que representen al medio poroso infinito. El desarrollo de la herramienta numérica estuvo basado en la técnica de volumen finito en mallas estructuradas definidas por rectángulos. Siguiendo la amplia literatura al respecto se aplicó el método integral en cada volumen de control y se estudiaron dos esquemas para aproximar el término convectivo: *upwind* de primer orden y QUICK. Las diversas simulaciones presentadas en el trabajo mostraron la robustez del método frente a diferentes condiciones de contorno, geometrías y parámetros fluidodinámicos. El esquema QUICK presentó gran estabilidad y precisión por lo que se lo eligió para llevar a cabo todas las simulaciones microscópicas que se realizaron. Los estudios de convergencia en malla realizados en el capítulo 3 mostraron que las implementaciones de los esquemas y de las condiciones de borde fueron correctas. Se concluyó también que el método SOR en su forma estándar utilizado para resolver el sistema lineal para la temperatura fue eficiente dado que el tiempo de cálculo era determinado por la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes.

El ejercicio de validación presentado en el capítulo 3 mostró que el código implementado es capaz de entregar resultados precisos y adecuados para el estudio a realizar. Esto se llevó a cabo resolviendo numéricamente el problema de la transferencia de calor laminar en la región de entrada de un canal de placas paralelas, considerando las condiciones de borde tanto de flujo de calor uniforme como el caso de temperatura de pared constante. Por último se estudió el desempeño del código frente a una geometría que presente el fenómeno de separación de flujo, para lo que se resolvió numéricamente el problema del canal con expansión brusca. En general, se pudo ver que los resultados numéricos fueron reproducidos muy satisfactoriamente. Este ejercicio permitió, además de lo expuesto, aprender sobre el desempeño del

---



código en cuanto al uso de mallas, pasos de tiempo, determinación de estados estacionarios y otros aspectos numéricos que fueron útiles para realizar las simulaciones presentadas en el capítulo 4. Adicionalmente, el entendimiento de los procesos de transferencia de calor para diferentes geometrías y parámetros fue enriquecedor para la mejor comprensión de los resultados obtenidos para el medio poroso.

El capítulo 4 reúne los resultados de las simulaciones microscópicas que se llevaron a cabo con el fin de obtener el campo temperatura y poder calcular el coeficiente interfacial de transferencia de calor. Las simulaciones microscópicas realizadas abarcaron 3 porosidades (55, 75 y 95%), diferentes números de Reynolds ( $0.1 < Re < 100$ ), Prandtl ( $0.1 < Pr < 100$ ), y dos condiciones de contorno térmicas: temperatura constante y flujo de calor uniforme.

El parámetro macroscópico se calculó utilizando la técnica de promediado en el volumen de un elemento representativo. Se resolvió el problema en un dominio compuesto por varias unidades repetidas permitiendo el desarrollo espacial de las variables involucradas. Los resultados mostraron una fuerte dependencia del coeficiente interfacial con la porosidad, siendo mayor a medida que la porosidad disminuía. También se observó que los resultados concuerdan aceptablemente con la correlación universal para dicho coeficiente determinada por Kuwahara et al. [2001]. En el rango de Reynolds estudiado no se observó una dependencia del coeficiente interfacial respecto a este parámetro. En segundo lugar se estudió el efecto que tiene la elección del REV y se observó que la elección afecta significativamente el valor del  $h_{sf}$  a medida que el  $Pe$  disminuye. Debido a este efecto se encuentra que los valores reportados en la bibliografía podrían estar subestimados al considerar el REV

que usualmente se utiliza. Se propuso entonces un método alternativo para el cálculo de este parámetro en el caso disponer resultados para más de un REV. La comparación entre el modelo unidimensional y el promedio de la temperatura microscópica resultó satisfactoria.